

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

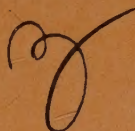
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Donatien LE HOUEDÉC

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1^{ère} Thèse : Contribution à l'étude du comportement de poutrelles en
béton soumises en flexion à des sollicitations de fatigue

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 2 Juillet 1971 devant la Commission d' Examen

MM. PIRONNEAU

Président

TARDY

VILAINE

RABBE

} Examineurs

THESES

présentées devant l'UNIVERSITE de NANTES

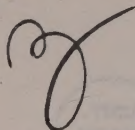
pour obtenir le grade de

DOCTEUR-INGENIEUR

par

Donatien LE HOUEDÉC

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



1^{ère} Thèse : Contribution à l'étude du comportement de poutrelles en béton soumises en flexion à des sollicitations de fatigue

2^{ème} Thèse : Propositions données par le Jury

Soutenues le 2 Juillet 1971 devant la Commission d' Examen

MM. PIRONNEAU

Président

TARDY

VILAINE

RABBE

} Examinateurs

UNIVERSITE DE NANTES

Président M. KERNEIS Médecine

Vice-Président M. PETRESCO Mathématiques

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

LISTE DES ENSEIGNANTS DES DISCIPLINES SCIENTIFIQUES

Professeurs

M. BRILLOUET Mathématiques

M. MOLINARO »

M. PAUC »

M. PETRESCO »

M. RAFFIN »

M. VIVIER (E.N.S.M.) »

M. TARDY (E.N.S.M.) Mécanique

M. RAVILLY (E.N.S.M.) »

M. AVIGNON Physique

M. BOULLLOUD »

M. COLLET »

M. MINN »

M. MEZEN CEV (E.N.S.M.) »

M. MOUTON »

M. DUNOYER Chimie

M. GRAFF »

M. PIERI »

M. QUINIOU »

M. WOJTKOWIAK »

Melle DEBRAU X Biologie

M. GARRIGUES »

Mme LE DOUARIN »

M. LE DOUARIN »

M. SELLIER »

M. CAVET Sciences de la Terre

Professeurs sans chaire M. MEYER

Mathématiques

M. BARDON

Physique

M. GOUREAU

«

M. LASKAR

«

Melle OFFRET (E.N.S.M.)

«

M. GOBIN (E.N.S.M.)

Chimie

M. MARTIN

«

M. ROUXEL

«

M. TOURNOUX

«

M. DUPONT

Biologie

M. SAU DRAY

«

M. OTTMANN

Sciences de la Terre

Maîtres de Conférences

M. FOUQUES

Mathématiques

M. IBISCH

«

M. LAMEAU (E.N.S.M.)

«

M. LEBORGNE

«

M. GUEVEL (E.N.S.M.)

Mécanique

M. SULMONT (E.N.S.M.)

«

M. VILAINE (E.N.S.M.)

«

M. CAILLER (I.U.T.)

Physique

M. COTTU (I.U.T.)

«

M. LE BIHAN

«

M. LE CORRE (I.U.T.)

«

M. LONCKE

«

M. ROSIER

«

M. BOUCHY (I.U.T.)

Chimie

M. CHABANNEL

«

Mme MARTIN

«

M. POINTEAU (E.N.S.M.)

«

M. AMOURIQ

Biologie

M. LEBRUN

«

Mme NICOLAS-PRATT

«

M. FORESTIER

Sciences de la Terre

M. NICOLAS

«

Secrétaire Général : M. LERAY



Nous tenons tout d'abord à remercier tous ceux qui ont prêté leur concours à la réalisation du présent travail.

Nos plus vifs remerciements s'adressent à Monsieur le Professeur PIRONNEAU, ancien directeur de l'E.N.S.M. et recteur de l'académie de Besançon, qui nous a encouragé à entreprendre et à poursuivre cette recherche. Nous lui exprimons ici toute notre profonde et respectueuse gratitude d'avoir bien voulu assumer la présidence de ce jury.

Nous tenons également à témoigner tous nos remerciements à Messieurs les Professeurs TARDY et VILAIN qui nous ont fait l'honneur de constituer les membres de ce jury, ainsi qu'à Monsieur RABBE, chargé du laboratoire de fatigue de l'IRSID, pour tout l'intérêt qu'il a bien voulu porter à cette recherche.

Nous ne saurions oublier tous ceux qui nous ont permis la réalisation matérielle de cette recherche et, en particulier, les assistants et le personnel des Laboratoires de Génie Civil et de Mécanique des Structures.

SOMMAIRE

	<u>Pages</u>
INTRODUCTION -	
PRINCIPALES NOTATIONS -	
Chapitre 1 - ETUDE VIBRATOIRE DU SYSTEME -	1
A - FREQUENCES PROPRES DU SYSTEME	1
1 - Système non amorti	1
2 - Système amorti	3
B - VIBRATIONS FORCEES D'UNE POUTRE APPUYEE A SES EXTREMITES ET SOUMISE A UNE CHARGE SINUSOÏDALE UNIFORMEMENT REPARTIE	4
1 - Mouvement non amorti	4
1-1 Résolution dans le cas général	4
1-2 Application au cas particulier d'une charge sinu- soïdale appliquée uniformément sur la poutre	5
1-3 Détermination des contraintes maximales	7
2 - Mouvement amorti	8
2-1 Cas d'une charge harmonique uniformément répartie	8
2-2 Application à une charge sinusoïdale uniformément répartie	10
2-3 Calcul du maximum de la réponse	11
2-4 Etude des contraintes maximales	12
2-4-1 Contrainte moyenne dans le cas d'un balayage	12
2-4-2 Racine carrée des carrés moyens de la con- trainte (contrainte efficace)	14
C - REPONSE DE LA POUTRE SOUMISE A UNE EXCITATION DU TYPE "BRUIT BLANC"	16
1 - Etude de l'impédance du système	16
1-1 Calcul de l'impédance en fonction des caractéris- tiques de la poutre	16
1-2 Expression de l'impédance complexe du système ex- cité par une force impulsionnelle	16

2 - Relations entre les spectres de puissance de l'excitation et de la réponse	17
2-1 Définitions	17
2-2 Relation entre $P(\omega)$ et $F(\omega)$	17
3 - Application à une excitation "bruit blanc" avec 2 fréquences de coupure	18
3-1 Relation entre les spectres de puissance	18
3-2 Calcul de la moyenne des carrés de $P(t)$ et $f(t)$	19
3-2-1 pour $P(t)$	19
3-2-2 pour $f(t)$	19
3-3 Détermination des fonctions d'autocorrélation de $P(t)$ et $f(t)$	21
3-3-1 pour $P(t)$	21
3-3-2 pour $f(t)$	21
3-4 Calcul de la valeur moyenne des carrés de la contrainte au milieu de la poutre	24
Chapitre 2 - ANALYSE DE LA RUPTURE PAR FATIGUE DU BETON -	25
A - GENERALITES	25
B - THEORIES RELATIVES A LA FISSURATION	26
1 - Théorie de GRIFFITH	26
2 - Théorie de BARENBLATT	26
C - ETUDE DE LA FONCTION "DOMMAGE"	27
1 - Définition	27
2 - Théories relatives au dommage cumulatif	27
2-1 Relation de MINER-PALMGREN	27
2-2 Théorie de WILKINS	28
2-3 Théorie de HILSDORF et KESLER	28
3 - Accumulation de dommage - Contrainte équivalente pour un balayage	29
3-1 Application à une excitation sinusoïdale pour un balayage à vitesse constante	30
3-2 Application à une excitation "bruit blanc" à bande étroite	30
D - ANALYSE STATISTIQUE DE LA FATIGUE DU BETON	31
1 - Définition des variables statistiques utilisées	31
2 - Théorie de SENIK	31
2-1 Introduction	31
2-2 Relations de SENIK	31

3 - Probabilité de rupture par fatigue	35
3-1 Définition de la fiabilité	35
3-2 Expressions de la fiabilité	35
3-3 Application à une distribution normale de LAPLACE-GAUSS	36

E - RESEAUX A 3 VARIABLES (NOMBRE DE CYCLES, CONTRAINTE APPLIQUEE, PROBABILITE DE RUPTURE)	38
---	----

1 - Etude de MAC-CALL	38
2 - Etablissement des réseaux	39
2-1 Théorie normale de GAUSS	39
2-2 Théorie de WEIBULL	40
2-2-1 Remarques sur la loi de distribution normale	40
2-2-2 Méthode de WEIBULL	40

F - PROBABILITE DE DEPASSER UNE VALEUR DONNEE DE LA REPONSE	41
1 - Application au cas d'une excitation "bruit blanc"	41
2 - Fréquence des valeurs de la réponse supérieures à $k\sqrt{f^2(t)}$	42

Chapitre 3 - ETUDE EXPERIMENTALE -	45
------------------------------------	----

A - RESULTATS D'ETUDES PRELIMINAIRES	45
--------------------------------------	----

1 - Détermination des caractéristiques physiques des matériaux utilisés	45
1-1 Densité des granulats	45
1-2 Courbe granulométrique	46
1-3 Dosage du béton	48
1-4 Résultats des essais statiques réalisés	48
1-4-1 Détermination du module d'Young du béton	48
1-4-2 Essais de rupture statique en flexion et compression	50
2 - Calcul de la fréquence propre du système et des con- traintes dynamiques maximales soumises à la poutre	51
2-1 Fréquences propres	51
2-1-1 Système non amorti	51
2-1-2 Système amorti	52
2-2 Contraintes dynamiques	53

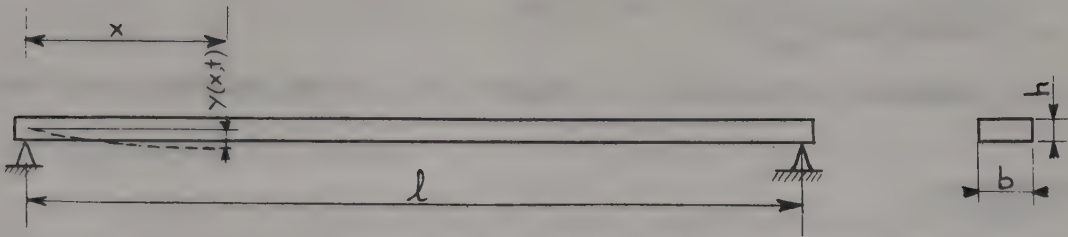
B - REPONSE DE LA POUTRE A UNE EXCITATION SINUSOÏDALE AVEC BALAYAGE EN FREQUENCES - DETERMINATION DE LA LIMITE DE FATIGUE DU BETON	53
1 - Introduction	53
2 - Résultats expérimentaux obtenus pour une excitation sinusoïdale avec balayage en fréquences	54
3 - Analyse des résultats obtenus	56
3-1 Cas d'une distribution gaussienne	56
3-2 Méthode de WEIBULL	58
3-3 Etablissement du réseau à 3 variables (α , $\log N$, p)	59
3-4 Limites des valeurs statistiques calculées	62
3-4-1 Valeurs des coefficients de SENIK	62
3-4-2 Limites de Z^* et s^*	62
4 - Contrainte équivalente durant le balayage	63
4-1 Contrainte moyenne σ_{moy}	63
4-2 Contrainte efficace $\sqrt{\sigma^2}$	65
4-3 Contrainte équivalente σ_e	65
C - REPONSE DE LA POUTRE A UNE EXCITATION "BRUIT BLANC"	66
1 - Résultats expérimentaux obtenus	68
1-1 Essais statiques	68
1-2 Essais de fatigue	68
2 - Détermination de la contrainte équivalente	69
3 - Bilan comparatif des essais sous excitation "bruit blanc" et sous excitation sinusoïdale avec balayage automatique	71
3-1 Excitation "bruit blanc"	71
3-2 Excitation sinusoïdale avec balayage	72
D - ETUDE DE LA RUPTURE PAR FATIGUE EN FONCTION DE LA FRE- QUENCE D'EXCITATION, DE L'AGE ET DE LA COMPOSITION DU BETON	73
1 - Influence de la fréquence d'excitation	73
1-1 Détermination des contraintes maximales corres- pondant à chaque fréquence d'expérimentation f_e	74
1-2 Détermination des fréquences théoriques corres- pondant à la rupture statique et à la limite de fatigue	77
1-2-1 Fréquences correspondant à la rupture sta- tique	77
1-2-2 Fréquences correspondant à la limite de fatigue	78
1-3 Calcul du coefficient δ	78

2 - Influence de la composition du béton	80
2-1 Composition et résistances statiques des bétons étudiés	80
2-2 Résultats des essais de fatigue	80
2-3 Détermination des contraintes maximales	80
2-4 Etude de la courbe $Z = f(u)$	81
3 - Influence de l'âge du béton	82
3-1 Résultats des essais de fatigue	83
3-2 Calcul des contraintes maximales	83
CONCLUSION -	86
BIBLIOGRAPHIE -	87

PRINCIPALES NOTATIONS

1 - Caractéristiques des poutres étudiées

1-1 Dimensions - Caractéristiques du béton



m : masse par unité de longueur de la poutre

I : moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre ($I = \frac{bh^3}{12}$)

V : distance de la fibre neutre à la fibre extrême ($V = \frac{h}{2}$)

E : module d'Young du béton

ρ : masse volumique du béton

1-2 Vibrations propres

ω_n : pulsation propre de la poutre correspondant à l'harmonique n

f_1 : fréquence propre fondamentale

k_n : défini par $\sqrt[4]{\frac{m\omega_n^2}{EI}}$

μ, ϵ_n : coefficients d'amortissement avec $\mu = 2m\epsilon_n \omega_n$

Ω_n : pulsation propre d'ordre n du système amorti ($\Omega_n = \omega_n \sqrt{1 - \epsilon_n^2} = \beta_n \omega_n$)

ϕ_n : déphasage correspondant au mode n

2 - Caractéristiques de l'excitation et de la réponse

2-1 Excitation

$p(x,t)$: charge extérieure appliquée à la poutre

P_0 : valeur maximale de $p(x,t)$

$q_n(t)$: défini par $q_n(t) = \int_0^l p(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$

$P(\omega)$: spectre de puissance de l'excitation

P_1 : valeur constante de $P(\omega)$ dans le cas d'une excitation "bruit blanc"

$\overline{P^2(t)}$: carré de la valeur efficace de l'excitation

$\Phi(\tau)$: fonction d'autocorrélation de l'excitation (fonction de la variable τ)

M : moment de flexion appliqué à la poutre

ω : pulsation de $p(x,t)$ ($\omega = 2\pi f_e$)

r : défini par $r = \frac{\omega}{\omega_1}$

α : défini par $\frac{P_0}{mg} = \alpha$

λ : paramètre définissant la largeur de la bande passante de l'excitation

2-2 Réponse

$y(x,t)$: flèche prise par la poutre au temps t et à la distance x de l'appui

$f(t)$: flèche au milieu de la poutre ($f(t) = y(\frac{l}{2}, t)$)

$F(\omega)$: spectre de puissance de $f(t)$

$\overline{f^2(t)}$: carré de la valeur efficace de la réponse $f(t)$

$\psi(\tau)$: fonction d'autocorrélation de $f(t)$

$Z(\omega)$: impédance mécanique de la poutre

3 - Détermination des contraintes

σ : valeur de la contrainte au sens le plus général

$\sigma_{\max}$: contrainte maximale au milieu de la poutre

σ_{moy} : contrainte moyenne (durant un balayage)

$\sqrt{\sigma^2}$: contrainte efficace

σ_e : contrainte équivalente

σ_j : contrainte de rupture statique en flexion au bout de j jours

σ'_j : contrainte de rupture statique en compression au bout de j jours

u_j : rapport $\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_j}$

4 - Etude statistique

n : nombre de poutrelles essayées

r : nombre de poutrelles cassées au bout d'un certain nombre de cycles

χ : défini par $\chi = \frac{r}{n}$

N : nombre de cycles à la rupture

Z, Z_1 : estimations de la valeur moyenne de $\log N$

s, s_1 : estimations de l'écart type de la distribution de $\log N$

c_v : coefficient de variations ($c_v(\%) = 100 \frac{s}{Z}$)

$\overline{k_z}, \overline{k_s}, \gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2, \mu_1, \mu_2$: notations statistiques de SENIK

D : fonction dommage

p : probabilité de rupture

$g(\sigma)$: densité de probabilité pour que la contrainte σ soit effectivement appliquée

δ : coefficient d'accumulation de dommage.

INTRODUCTION

L'intérêt pour l'étude du comportement des matériaux sous l'effet de la fatigue est né depuis longtemps. Au début du siècle, si les résultats des travaux de ALBERT (1829), HODGKINSON (1849), WÖHLER (1852)..., concernant la fatigue des métaux, étaient déjà intéressants, par contre l'analyse du béton en était encore à ses premiers pas. De plus, il faut préciser que les essais initiaux dus à CONSIDERE et DE JOLY étaient surtout réalisés sur des éprouvettes de mortier.

Les recherches approfondies débutèrent vers 1925 aux U.S.A. avec CLEMMER, HATT, CREPPS... ("Perdue University" et "Illinois Department of Highways"). Par la suite, d'autres auteurs (WILLIAMS, KESLER, HILSDORF, KAPLAN, MAC-CALL...) se sont intéressés à ce problème de la fatigue du béton. Très souvent, leurs études se limitaient à des essais expérimentaux et à leur interprétation, mais, en règle générale, ne permettaient pas la relation entre les caractéristiques de l'excitation et la durée de vie des poutrelles soumises aux effets de fatigue.

Au cours des dernières années, les problèmes de fatigue ont pris une importance considérable dans beaucoup de domaines (effets des charges cycliques mais aussi dommages dus à la progression rapide de la densité de circulation dans les villes). Nous pouvons citer en exemple les recherches de J.H.A CROCKETT sur l'analyse des fissures de fatigue apparaissant sur les cathédrales anglaises du Moyen-Age, ces fissures étant causées par les vibrations dues au trafic routier.

Dans l'étude entreprise, nous nous sommes limités à l'analyse du comportement des poutres sous l'effet de la fatigue et nous avons essayé de relier directement la contrainte appliquée et la durée de vie.

Nous avons d'abord établi la théorie d'un système formé par une poutre appuyée à ses 2 extrémités, l'excitation étant aléatoire (correspondant au cas de la circulation de véhicules lourds au voisinage d'un édifice par exemple) ou sinusoïdale (vibrations dues à des mouvements mécaniques périodiques...).

L'analyse de la durée de vie des poutrelles en fonction des contraintes appliquées déduites de la théorie précédente a fait ensuite l'objet de notre étude qui a également porté sur les variations de la résistance à la fatigue d'un béton en fonction des facteurs suivants :

- Type d'excitation (sinusoïdale ou aléatoire)
- Fréquence d'excitation
- Age et composition du béton.

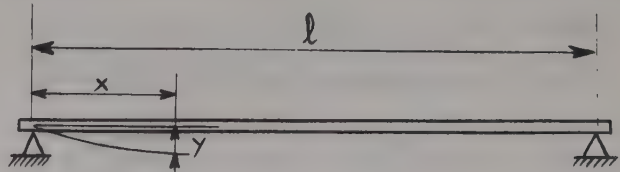
Chapitre 1

ETUDE VIBRATOIRE DU SYSTEME

Nous nous proposons d'étudier les vibrations libres et forcées d'une poutre appuyée à ses 2 extrémités et d'en déduire les contraintes dynamiques. Pour cette étude, nous allons considérer la poutre comme un système amorti. D'autre part, nous analyserons la réponse de la poutre pour une excitation du type "bruit blanc".

A - FREQUENCES PROPRES DU SYSTEME -

1 - Système non amorti



Soit une poutre de longueur l appuyée à ses 2 extrémités, m sa masse par unité de longueur, I le moment d'inertie de la section par rapport à l'axe neutre et E le module d'Young du béton.

à l'abscisse x , l'équation différentielle d'équilibre dans le cas d'un mouvement non amorti s'écrit :

$$\boxed{m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}} \quad (1)$$

En utilisant la méthode de séparation des variables, c'est-à-dire que $y(x,t) = X(x) \cdot f(t)$ où $X(x)$ et $f(t)$ sont des fonctions ne dépendant respectivement que de x et du temps, la relation (1) se réduit aux 2 équations différentielles suivantes :

$$EI \frac{d^4 X(x)}{dx^4} = m\omega^2 X(x) \quad (2)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \omega^2 f(t) = 0 \quad \text{où } \omega^2 \text{ est une constante} \quad (3)$$

La solution générale de (3) est donnée sous la forme :

$$f(t) = A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t$$

En posant $k^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$, l'équation (2) devient :

$$\frac{d^4 X(x)}{dx^4} - k^4 X(x) = 0$$

dont la solution générale est donnée par :

$$X(x) = B_1 \operatorname{ch} kx + B_2 \operatorname{sh} kx + B_3 \cos kx + B_4 \sin kx$$

Les valeurs de B_1, B_2, B_3, B_4 sont déterminées par les conditions aux limites :

$$x = 0 \quad \left\{ \begin{array}{lll} y(0,t) = 0 & X(0) = 0 & 0 = B_1 + B_3 \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0,t) = 0 & \left[\frac{d^2 X}{dx^2} \right]_{x=0} = 0 & 0 = k^2 B_1 - k^2 B_3 \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } B_1 = B_3 = 0$$

$$x = l \quad \left\{ \begin{array}{lll} y(l,t) = 0 & X(l) = 0 & 0 = B_2 \operatorname{sh} kl + B_4 \sin kl \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(l,t) = 0 & \left[\frac{d^2 X}{dx^2} \right]_{x=l} = 0 & 0 = B_2 k^2 \operatorname{ch} kl - B_4 k^2 \sin kl \end{array} \right.$$

Ces 2 équations conduisent au système :

$$B_2 \operatorname{sh} kl + B_4 \sin kl = 0$$

$$B_2 \operatorname{sh} kl - B_4 \sin kl = 0$$

système admettant une solution non nulle pour :

$$B_2 = 0 \quad \text{et} \quad \sin kl = 0$$

$$\text{soit } k_n l = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

Cette équation caractérise les fréquences propres ω_n de la poutre sur 2 appuis. Compte-tenu de la relation $k^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$, il vient :

$$\omega_n = k_n^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$\text{soit } \boxed{\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}}$$

Le mode propre correspondant à l'harmonique n s'exprime par :

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (6)$$

L'expression de la flèche $y(x,t)$ s'en déduit immédiatement :

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} [A_{1n} \cos \omega_n t + A_{2n} \sin \omega_n t]} \quad (7)$$

Les constantes A_{1n} et A_{2n} sont déterminées à partir des conditions initiales. Supposons par exemple que $y(x,0) = y_0(x)$ et $\frac{\partial y}{\partial t}(0,t) = v_0(x)$

$$\text{soit } y_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} \sin \frac{n\pi x}{l}$$

$$v_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \omega_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Les valeurs de A_{1n} et A_{2n} s'en déduisent par :

$$A_{1n} = \frac{2}{l} \int_0^l y_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$A_{2n} = \frac{2}{l\omega_n} \int_0^l v_0(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

Généralement, la flèche d'une poutre en béton sous son propre poids est minime par rapport aux déplacements dus aux charges dynamiques. Par conséquent, nous négligerons l'influence des vibrations libres par rapport à l'effet des vibrations forcées.

2 - Système amorti

Dans le cas d'un mouvement amorti, il convient d'ajouter à l'équation différentielle (1) un terme d'amortissement, c'est-à-dire :

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad \mu : \text{coefficient d'amortissement} \quad (8)$$

La recherche d'une solution telle que :

$$y(x,t) = X(x) f(t)$$

conduit à l'équation :

$$\frac{1}{m X(x)} EI \frac{d^4 X(x)}{dx^4} = - \frac{1}{f(t)} \left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{df(t)}{dt} \right] = \omega^2 \text{ (constante)}$$

ce qui donne les 2 équations différentielles suivantes :

$$EI \frac{d^4 X(x)}{dx^4} - m\omega^2 X(x) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{\mu}{m} \frac{df(t)}{dt} + \omega^2 f(t) = 0 \quad (10)$$

En posant $\mu = 2\epsilon m\omega$, (10) devient :

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2\epsilon\omega \frac{df(t)}{dt} + \omega^2 f(t) = 0$$

dont la solution générale s'écrit :

$$f(t) = Ae^{-\epsilon\omega t} \cos(\Omega t + \phi)$$

Ω et ϕ étant définis par les relations :

$$\Omega = \omega \sqrt{1-\varepsilon^2} \quad \phi = \text{déphasage}$$

En posant $k^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$, l'équation (9) nous donne comme solution générale :

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

d'où l'expression de $y(x,t)$:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot e^{-\varepsilon_n \omega_n t} \cos(\Omega_n t + \phi_n) \quad (11)$$

$$\text{avec } \Omega_n = \omega_n \sqrt{1-\varepsilon_n^2}$$

$$\text{et } \varepsilon_n = \frac{\mu}{2m\omega_n}$$

ϕ_n représentant le déphasage correspondant au mode n .

Le mouvement de la poutre sera sinusoïdal amorti de pulsation $\Omega_n = \omega_n \sqrt{1-\varepsilon_n^2}$. Les remarques que nous avons formulées au sujet des vibrations non amorties restent évidemment valables et généralement nous pouvons négliger l'influence des vibrations libres par rapport à celle des vibrations forcées.

B - VIBRATIONS FORCÉES D'UNE POUTRE APPUYÉE À SES EXTREMITÉS ET SOUMISE À UNE CHARGE SINUSOÏDALE UNIFORMEMENT RÉPARTIE -

1 - Mouvement non amorti [1]

Soit $p(x,t)$ la force extérieure appliquée à la poutre. L'équation différentielle du mouvement peut s'écrire alors :

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p(x,t) \quad (12)$$

1-1 Résolution dans le cas général

La solution générale de cette équation peut se mettre sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) f_n(t) \quad (13)$$

où $X_n(x)$ représente les fonctions caractéristiques satisfaisant à la relation

$$EI \frac{d^4 X_n}{dx^4} = m\omega_n^2 X_n \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad \text{et aux 4 conditions aux limites.}$$

Les équations (12) et (13) nous permettent d'écrire :

$$m \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} + EI \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^4 X_n(x)}{dx^4} \cdot f_n(t) = p(x,t)$$

L'orthogonalité des modes propres nous donne :

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \frac{l}{2} & \text{si } m = n \end{cases}$$

En multipliant les 2 membres par $X_m(x)$ et en intégrant de 0 à l , nous obtenons :

$$\frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} + \omega_n^2 f_n(t) = \frac{2}{ml} q_n(t) \quad (14)$$

$$\text{où } q_n(t) = \int_0^l p(x,t) X_n(x) dx$$

La résolution de (14) par le calcul symbolique en prenant les conditions initiales nulles, nous donne :

$$f_n(t) \supset F_n(s)$$

$$\frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} \supset s^2 F_n(s)$$

$$q_n(t) \supset Q_n(s)$$

$$\text{soit } (s^2 + \omega_n^2) F_n(s) = \frac{2}{ml} Q_n(s)$$

et, par conséquent :

$$f_n(t) = \frac{2}{ml\omega_n} \int_0^t q_n(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau$$

d'où l'expression de $y(x,t)$:

$$\boxed{\begin{aligned} y(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{l} \cdot \frac{2}{ml\omega_n} \int_0^t q_n(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau \\ \text{avec } \omega_n &= n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}} \text{ et } q_n(t) = \int_0^l p(x,t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{aligned}} \quad (15)$$

1-2 Application au cas particulier d'une charge sinusoïdale appliquée uniformément à la poutre

Supposons que la charge $p(x,t)$ soit sinusoïdale et uniformément répartie sur la poutre, c'est-à-dire :

$$p(x,t) = P_0 \sin \omega t$$



$$\text{Par conséquent, } q_n(t) = \int_0^l P_0 \sin \omega t \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$\text{soit } q_n(t) = \frac{P_0 l}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \sin \omega t$$

d'où :

pour $n = 2p$	$q_{2p}(t) = 0$	(16)
pour $n = 2p+1$	$q_{2p+1}(t) = \frac{2 P_o \ell}{(2p+1)\pi} \sin \omega t$	

Calcul de $\int_0^t q_n(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau$

$$\int_0^t q_n(\tau) \sin \omega_n(t-\tau) d\tau = \frac{P_o \ell}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \int_0^t \sin \omega \tau \sin \omega_n(t-\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^t \sin \omega \tau \sin \omega_n(t-\tau) d\tau &= \frac{1}{\omega + n^2 \omega_1} (\sin \omega t + \sin n^2 \omega_1 t) \\ &\quad - \frac{1}{\omega - n^2 \omega_1} (\sin \omega t - \sin n^2 \omega_1 t) \end{aligned}$$

$$\int_0^t \sin \omega \tau \sin \omega_n(t-\tau) d\tau = \frac{n^2 \omega_1}{(n^2 \omega_1)^2 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{\omega}{(n^2 \omega_1)^2 - \omega^2} \sin n^2 \omega_1 t$$

d'où l'expression de $f_n(t)$:

$$f_n(t) = \frac{2}{m\ell \omega_n} \frac{P_o \ell}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \left[\frac{n^2 \omega_1}{(n^2 \omega_1)^2 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{\omega}{(n^2 \omega_1)^2 - \omega^2} \sin n^2 \omega_1 t \right]$$

Sachant que $\omega_n = n^2 \omega_1$ avec $\omega_1^2 = \pi^4 \frac{EI}{m\ell^4}$, nous pouvons écrire :

$$f_n(t) = \frac{2 P_o \ell^4}{\pi^4 EI} \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} \left[\frac{1}{n^4 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \sin \omega t - \frac{\frac{\omega}{\omega_1}}{n^2 \left[n^4 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right]} \sin n^2 \omega_1 t \right]$$

avec $f_{2p}(t) = 0$

Finalement, nous obtenons pour $y(x,t)$:

$y(x,t) = \frac{4 P_o \ell^4}{\pi^5 EI} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{[(2p+1)^4 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2]} \sin \frac{(2p+1)\pi x}{\ell} \right] \sin \omega t$	(17)
$- \frac{4 \frac{\omega}{\omega_1} P_o \ell^4}{\pi^5 EI} \left[\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)^3 [(2p+1)^4 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2]} \sin \frac{(2p+1)\pi x}{\ell} \sin (2p+1)^2 \omega_1 t \right]$	

L'équation (17) nous montre que la vibration forcée résulte de 2 mouvements dont l'un est de même fréquence que la force excitatrice et l'autre provient de la superposition de mouvements de fréquences égales à celle du fon-

damental et des harmoniques. Il y a résonance quand $\frac{\omega}{\omega_1}$ est égal au carré d'un nombre impair (1,9,25,...).

Les 2 séries de l'équation (17) sont très rapidement convergentes. Une bonne approximation de $y(x,t)$ est donc obtenue en ne conservant que le 1er terme de chaque série, c'est-à-dire :

$$y(x,t) \approx \frac{4 P_o \ell^4}{\pi^5 EI} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \left[\sin \omega t - \frac{\omega}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

dont la valeur maximale est donnée par :

$$y(x,t) = \frac{4 P_o \ell^4}{\pi^5 EI} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{\ell} \sin \omega t$$

En posant $\frac{\omega}{\omega_1} = r$, la flèche maximale au milieu de la poutre s'écrit :

$$y_{\max} = \frac{4 P_o \ell^4}{\pi^5 EI} \frac{1}{1-r^2} \quad (18)$$

1-3 Détermination des contraintes maximales

La contrainte σ de flexion due à un moment M s'écrit :

$$\sigma = \frac{Mv}{I}$$

où v est la distance de la fibre neutre à la fibre extrême.

Comme $M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, σ sera donnée par :

$$\sigma = v E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (19)$$

$$\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_{x = \frac{\ell}{2}} = \frac{4 P_o \ell^4}{\pi^5 EI} \frac{1}{1-r^2} \frac{\pi^2}{\ell^2}$$

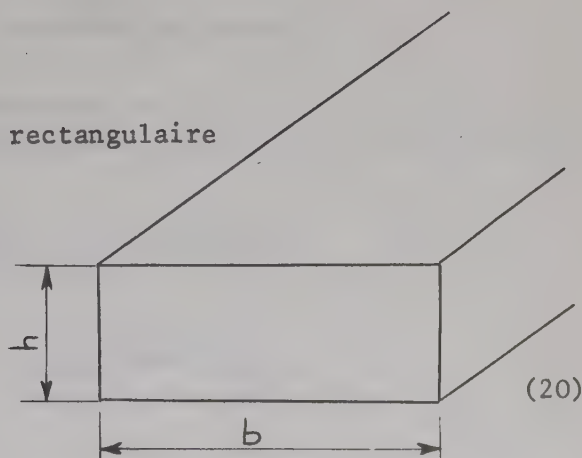
$$D'où \sigma_{\max} = \frac{4 P_o \ell^2 v}{\pi^3 I (1-r^2)}$$

Pour une poutre à section rectangulaire

$$v = \frac{h}{2}$$

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{24 P_o \ell^2}{\pi^3 bh^2} \frac{1}{1-r^2}$$



2 - Mouvement amorti

Dans ce cas, l'équation générale du mouvement est donnée par :

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial y}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = p(x, t)$$

La recherche de solutions telles que $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) f_n(t)$ conduit à l'équation :

$$m \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} + \mu \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \frac{df_n(t)}{dt} + m \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 X_n(x) f_n(t) = p(x, t)$$

En multipliant par $X_m(x)$ et en intégrant de 0 à l , nous obtenons :

$$\boxed{\frac{d^2 f_n(t)}{dt^2} + 2 \epsilon_n \omega_n \frac{df_n(t)}{dt} + \omega_n^2 f_n(t) = \frac{2}{ml} q_n(t)} \quad (21)$$

où $\epsilon_n = \frac{\mu}{2m \omega_n}$ et $q_n(t) = \int_0^l p(x, t) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$

2-1 Cas d'une charge harmonique uniformément répartie

Dans le cas d'une charge harmonique uniformément répartie, nous aurons : $p(x, t) = P_0 e^{i\omega t}$

Alors $q_n(t) = \frac{P_0 l}{n\pi} (1 - \cos n\pi) e^{i\omega t}$

pour $n = 2p$ $q_{2p}(t) = 0$

$n = 2p+1$ $q_{2p+1}(t) = \frac{2 P_0 l}{(2p+1)\pi} e^{i\omega t} \quad (22)$

La résolution de l'équation (21) par la transformation de LAPLACE [2] nous donne :

$$\begin{aligned} f_n(t) &\supset F_n(s) & f_n''(t) &\supset s^2 F_n(s) \\ f_n'(t) &\supset s F_n(s) & q_n(t) &\supset Q_n(s) \end{aligned}$$

L'équation différentielle (21) devient :

$$F_n(s) = \frac{2 Q_n(s)}{ml(s^2 + 2 \epsilon_n \omega_n s + \omega_n^2)}$$

L'original de $\frac{1}{s^2 + 2 \epsilon_n \omega_n s + \omega_n^2}$ étant :

$$\frac{1}{\Omega_n} e^{-\epsilon_n \omega_n t} \sin \Omega_n t \quad \text{avec} \quad \Omega_n = \omega_n \sqrt{1 - \epsilon_n^2}$$

l'expression de $f_n(t)$ sera donc donnée par le produit de convolution :

$$f_n(t) = \frac{2}{m\ell} \int_0^t q_n(\tau) \frac{1}{\Omega_n} e^{-\varepsilon_n \omega_n (t-\tau)} \sin \Omega_n (t-\tau) d\tau$$

En considérant la valeur de $q_n(t)$ exprimée dans (22), la valeur de $f_n(t)$ s'écrit alors :

$$\boxed{f_n(t) = \frac{2 P_0 (1 - \cos n\pi)}{m \Omega_n \cdot n\pi} \cdot I_n}$$

$$\text{où } I_n = \int_0^t e^{i\omega\tau} e^{-\varepsilon_n \omega_n (t-\tau)} \sin \Omega_n (t-\tau) d\tau$$
(23)

Calcul de I_n

$$2 i I_n = \int_0^t e^{i\omega\tau} e^{-\varepsilon_n \omega_n (t-\tau)} [e^{i\Omega_n (t-\tau)} - e^{-i\Omega_n (t-\tau)}] d\tau$$

$$2 i I_n = \frac{e^{(-\varepsilon_n \omega_n + i\Omega_n)t}}{\varepsilon_n \omega_n + i(\omega - \Omega_n)} \left[e^{[\varepsilon_n \omega_n + i(\omega - \Omega_n)]\tau} \right]_0^t$$

$$- \frac{e^{(-\varepsilon_n \omega_n - i\Omega_n)t}}{\varepsilon_n \omega_n + i(\omega + \Omega_n)} \left[e^{[\varepsilon_n \omega_n + i(\omega + \Omega_n)]\tau} \right]_0^t$$

$$2 i I_n = \frac{1}{\varepsilon_n \omega_n + i(\omega - \Omega_n)} [e^{i\omega t} - e^{-\varepsilon_n \omega_n t} e^{i\Omega_n t}]$$

$$- \frac{1}{\varepsilon_n \omega_n + i(\omega + \Omega_n)} [e^{i\omega t} - e^{-\varepsilon_n \omega_n t} e^{-i\Omega_n t}]$$

$$\boxed{2 i I_n = e^{i\omega t} \left[\frac{1}{\varepsilon_n \omega_n + i(\omega - \Omega_n)} - \frac{1}{\varepsilon_n \omega_n + i(\omega + \Omega_n)} \right]}$$

$$- e^{-\varepsilon_n \omega_n t} \left[\frac{e^{i\Omega_n t}}{\varepsilon_n \omega_n + i(\omega - \Omega_n)} - \frac{e^{-i\Omega_n t}}{\varepsilon_n \omega_n + i(\omega + \Omega_n)} \right]$$

Quand t croît, $e^{-\varepsilon_n \omega_n t}$ tend très rapidement vers 0, nous pouvons donc ne considérer que le 1er terme de I_n .

$$\text{En posant } \beta_n = \sqrt{1 - \varepsilon_n^2} \quad r_n = \frac{\omega}{\omega_n}$$

$$\Omega_n = \omega_n \sqrt{1 - \varepsilon_n^2} = \beta_n \omega_n$$

l'expression de I_n s'écrit donc :

$$I_n = \frac{e^{i\omega t}}{2i\omega_n} \left[\frac{1}{\epsilon_n + i(r_n - \beta_n)} - \frac{1}{\epsilon_n + i(r_n + \beta_n)} \right]$$

En réduisant au même dénominateur, nous obtenons :

$$I_n = \frac{\beta_n e^{i\omega t}}{\omega_n} \frac{(1-r_n^2) - 2i\epsilon_n r_n}{[\epsilon_n^2 + (r_n - \beta_n)^2] [\epsilon_n^2 + (r_n + \beta_n)^2]} \quad (24)$$

D'après (23), l'expression de $f_n(t)$ s'écrit :

$$f_n(t) = \frac{2P_o(1-\cos n\pi)}{m\omega_n^2 \cdot n\pi} e^{i\omega t} \frac{(1-r_n^2) - 2i\epsilon_n r_n}{(r_n^2 - 2\beta_n r_n + 1)(r_n^2 + 2\beta_n r_n + 1)}$$

2.2 - Application à une charge sinusoïdale uniformément répartie

Supposons que la poutre précédente soit soumise à une charge sinusoïdale $P_o \sin \omega t = I(P_o e^{i\omega t})$, $I(P_o e^{i\omega t})$ représentant la partie imaginaire de la fonction entre parenthèses.

Par conséquent :

$$f_n(t) = \frac{2P_o(1-\cos n\pi)}{m\omega_n^2 \cdot n\pi} \sin(\omega t + \phi_n) \frac{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + 4\epsilon_n^2 r_n^2}}{[1 + r_n^2 + 2\beta_n r_n] [-2\beta_n r_n + 1 + r_n^2]}$$

où ϕ_n est défini par :

$$\operatorname{tg} \phi_n = \frac{2\epsilon_n r_n}{1-r_n^2}$$

$$\text{mais } [1 + r_n^2 + 2\beta_n r_n] [1 + r_n^2 - 2\beta_n r_n] = (1-r_n^2)^2 + 4\epsilon_n^2 r_n^2$$

d'où :

$$f_n(t) = \frac{2P_o(1-\cos n\pi)}{m\omega_n^2 \cdot n\pi} \sin(\omega t + \phi_n) \frac{1}{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + 4\epsilon_n^2 r_n^2}}$$

par conséquent :

$$y_n(t) = \frac{2P_o(1-\cos n\pi)}{m\omega_n^2 \cdot n\pi} \frac{1}{\sqrt{(1-r_n^2)^2 + 4\epsilon_n^2 r_n^2}} \sin(\omega t + \phi_n) \sin \frac{n\pi x}{l}$$

L'amplitude totale sera donnée par :

$$y(x,t) = \frac{4P_o}{m\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(2p+1)\omega_{2p+1}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-r_{2p+1}^2)^2 + 4\varepsilon_{2p+1}^2 r_{2p+1}^2}} \cdot \sin(\omega t + \phi_{2p+1}) \cdot \sin(2p+1) \frac{\pi x}{l}$$

avec : $\omega_{2p+1} = (2p+1)^2 \omega_1 = (2p+1)^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{m l^4}}$

$$r_{2p+1} = \frac{\omega}{\omega_{2p+1}}$$

$$\varepsilon_{2p+1} = \frac{\mu}{2m\omega_{2p+1}}$$

$$\text{tg } \phi_{2p+1} = \frac{2\varepsilon_{2p+1} r_{2p+1}}{1-r_{2p+1}^2}$$

(25)

Au milieu de la poutre ($x = \frac{l}{2}$) $X_n(x) = 1$

donc : $[y(x,t)]_{x=\frac{l}{2}} = f(t)$

Comparaison des amplitudes dans l'équation (25)

pour $p=0$ $[y_1(x,t)]_{\max} = \frac{4P_o}{m\pi} \frac{1}{\omega_1^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r_1^2)^2 + 4\varepsilon_1^2 r_1^2}}$

pour $p=1$ $[y_3(x,t)]_{\max} = \frac{4P_o}{m\pi} \frac{1}{3\omega_3^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r_3^2)^2 + 4\varepsilon_3^2 r_3^2}}$

Dans la plage de fréquences que nous étudierons ($f < 300$ Hz), les facteurs d'amplification n'apportant pas de variantes importantes, nous pouvons donc, en obtenant une bonne approximation de la réponse, ne conserver que le 1er terme du développement, c'est-à-dire :

$$y(x,t) \approx \frac{4P_o}{m\pi\omega_1^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r_1^2)^2 + 4\varepsilon_1^2 r_1^2}} \sin(\omega t + \phi_1) \sin \frac{\pi x}{l} \quad (26)$$

Cette valeur de la réponse est strictement identique à celle obtenue pour un oscillateur simple (masse - ressort - amortisseur). Pour la suite de l'étude, nous écrirons dans un but de simplification :

$$r_1 = r \quad \varepsilon_1 = \varepsilon \quad \beta_1 = \beta$$

2.3 - Calcul du maximum de la réponse

Pour $x = \frac{l}{2}$ $[y(x,t)]_{\max} = f(t)$

La valeur maximale de $f(t)$ sera obtenue pour $\frac{df}{dt} = 0$

$$\text{soit } \frac{df(t)}{dt} = + \frac{4P_o}{m\pi\omega_1^2} [(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2]^{-\frac{3}{2}} 2r[1 - r^2 - 2\epsilon^2] = 0$$

ce qui nous donne $r = 0$

$$r = \sqrt{1-2\epsilon^2}$$

$$\text{Pour } r = \sqrt{1-2\epsilon^2} \quad [y(x,t)]_{\max} = \frac{4P_o}{m\pi\omega_1^2} \frac{1}{2\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

$$\text{soit } [y(x,t)]_{\max} = \frac{4P_o}{m\pi\omega_1^2} \frac{1}{2\epsilon\beta} \quad (27)$$

Pour le béton $\epsilon = 0,1$ $\beta = 0,995$ on obtient un facteur d'amplification de 1'ordre de 5.

2.4 - Etude des contraintes maximales

La relation (19) a permis d'écrire :

$$\sigma_{\max} = v E \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_{\max}$$

L'expression de $y(x,t)$ obtenue dans (26) permet d'écrire :

$$\sigma_{\max} = v E \frac{\pi^2}{l^2} \frac{4 P_o}{m\pi\omega_1^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}}$$

Pour une poutre à section rectangulaire :

$$v = \frac{h}{2} \quad I = \frac{bh^3}{12}$$

$$\text{et } \sigma_{\max} = \frac{24 P_o l^2}{\pi^3 bh^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}} \quad (28)$$

2.4.1 Contrainte moyenne dans le cas d'un balayage

Pour l'étude de la limite de fatigue, nous avons considéré un balayage en fréquence à vitesse angulaire constante. Ce balayage nous conduit donc à connaître la contrainte moyenne soumise à la poutre pendant un cycle de balayage. Le calcul revient à intégrer les courbes de résonance, la contrainte moyenne étant en effet définie par :

$$\sigma_{\text{moy}} = \frac{24 P_o l^2}{\pi^3 bh^2} \frac{\int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}}}{r_b - r_a} \quad (29)$$

avec $r_a = \frac{f_a}{f_1}$ $r_b = \frac{f_b}{f_1}$

f_a, f_b désignant les fréquences extrêmes du cycle
et f_1 la 1ère fréquence propre de la poutre

$$\text{Calculons } J = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}} dr$$

Le changement de variable $r = \frac{1+t}{1-t}$

avec $dr = \frac{2dt}{(1-t)^2}$ conduit à l'expression :

$$J = \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{\sqrt{\varepsilon^2 t^4 - 2t^2(\varepsilon^2 - 2) + \varepsilon^2}}$$

où $t_a = \frac{r_a - 1}{r_a + 1}$ $t_b = \frac{r_b - 1}{r_b + 1}$

Calculons les racines du polynôme $P(t^2) = \varepsilon^2 t^4 - 2t^2(\varepsilon^2 - 2) + \varepsilon^2$

$$t^2 = \frac{\varepsilon^2 - 2 \pm 2\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon^2}$$

Comme ε est faible devant 1 ($\varepsilon = 0,10$), nous pouvons écrire :

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2} = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^4}{8} \dots$$

d'où les racines approchées du polynôme bicarré :

$$t^2 = -\frac{\varepsilon^2}{4} \dots \text{ et } t^2 = 2 - \frac{4}{\varepsilon^2} \dots$$

soit $\varepsilon^2 t^4 - 2t^2(\varepsilon^2 - 2) + \varepsilon^2 = \varepsilon^2(t^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \dots)(t^2 - 2 + \frac{4}{\varepsilon^2} \dots)$

et $J = \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{\varepsilon \sqrt{(t^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} \dots)(t^2 - 2 + \frac{4}{\varepsilon^2} \dots)}}$

Le changement de variable $t = \frac{\varepsilon}{2} u$ donne :

$$J = \frac{1}{\varepsilon} \int_{u_a}^{u_b} \frac{du}{\sqrt{(1+u^2) (\frac{4}{\varepsilon^2} - 2 + \frac{\varepsilon^2}{4} u^2)}}$$

où $u_a = \frac{2}{\varepsilon} t_a$ $u_b = \frac{2}{\varepsilon} t_b$

Nous pouvons aussi noter :

$$J = \frac{1}{\sqrt{4-2\epsilon^2}} \int_{u_a}^{u_b} \frac{du}{\sqrt{(1+u^2)} (1+\gamma^2 u^2)}$$

$$\text{avec } \gamma^2 = \frac{\epsilon^4}{4(4-2\epsilon^2)}$$

pour $\epsilon = 0,10$ $\gamma^2 = \frac{10^{-4}}{4(4-2 \cdot 10^{-2})} = 6,3 \cdot 10^{-6}$

Pour le balayage que nous avons utilisé $u \leq 7,1$

soit $\gamma^2 u^2 \leq 3,2 \cdot 10^{-4}$

Nous pouvons donc négliger le terme $\gamma^2 u^2$ par rapport à 1

soit $J \approx \frac{1}{\sqrt{4-2\epsilon^2}} \int_{u_a}^{u_b} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{4-2\epsilon^2}} [\text{Arg sh } u]_{u_a}^{u_b}$$

ou si l'on veut :

$$J = \frac{1}{\sqrt{4-2\epsilon^2}} \left[\text{Arg sh } \frac{2(r-1)}{\epsilon(r+1)} \right]_{r_a}^{r_b}$$

La valeur de σ_{moy} s'exprime alors par :

$$\sigma_{\text{moy}} = \frac{24 P_o l^2}{\pi^3 b h^2} \frac{1}{\sqrt{4-2\epsilon^2}} \frac{1}{r_b - r_a} \left[\text{Arg sh } \frac{2(r_b-1)}{\epsilon(r_b+1)} - \text{Arg sh } \frac{2(r_a-1)}{\epsilon(r_a+1)} \right]$$

2.4.2 Racine carrée des carrés moyens de la contrainte (contrainte efficace)

L'étude de la réponse d'une poutre soumise, autour de la fréquence de résonance, à une excitation du type "bruit blanc" ne faisant intervenir que les racines carrées des carrés moyens des amplitudes et des contraintes, nous avons pensé qu'il était utile de calculer ces valeurs dans le cas d'un balayage en vue d'une comparaison des 2 essais.

Nous noterons et définirons cette contrainte par :

$$\sqrt{\overline{\sigma^2}} = \left[\frac{\int_{r_a}^{r_b} \sigma^2 dr}{r_b - r_a} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{soit } \sqrt{\sigma^2} = \frac{24 P_o \ell^2}{\pi^3 b h^2} \frac{1}{\sqrt{r_b - r_a}} \left[\int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{24 P_o \ell^2}{\pi^3 b h^2} \frac{1}{\sqrt{r_b - r_a}} \sqrt{K}$$

$$\text{avec } K = \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}$$

Calcul de K

$$\frac{1}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2} = \frac{1}{4\beta} \left[\frac{-r + 2\beta}{r^2 - 2\beta r + 1} + \frac{r + 2\beta}{r^2 + 2\beta r + 1} \right]$$

$$\text{avec } \beta^2 = 1 - \epsilon^2$$

$$\int \frac{r + 2\beta}{r^2 + 2\beta r + 1} dr = \frac{1}{2} \ln(r^2 + 2\beta r + 1) + \frac{\beta}{\epsilon} \text{Arc tg } \frac{r+\beta}{\epsilon}$$

Pour le calcul de $\int \frac{r - 2\beta}{r^2 - 2\beta r + 1} dr$, il suffit, par rapport à l'intégrale précédente, de changer β en $-\beta$, c'est-à-dire :

$$\int \frac{r - 2\beta}{r^2 - 2\beta r + 1} dr = \frac{1}{2} \ln(r^2 - 2\beta r + 1) - \frac{\beta}{\epsilon} \text{Arc tg } \frac{r-\beta}{\epsilon}$$

L'expression de K s'en déduit immédiatement :

$$K = \left[\frac{1}{8\beta} \ln \frac{r^2 + 2\beta r + 1}{r^2 - 2\beta r + 1} + \frac{1}{4\epsilon} \left[\text{Arc tg } \frac{r+\beta}{\epsilon} + \text{Arc tg } \frac{r-\beta}{\epsilon} \right] \right]_{r=r_a}^{r=r_b}$$

soit :

$$K = \frac{1}{8\beta} \ln \frac{(r_b^2 + 2\beta r_b + 1)(r_a^2 - 2\beta r_a + 1)}{(r_b^2 - 2\beta r_b + 1)(r_a^2 + 2\beta r_a + 1)} + \frac{1}{4\epsilon} \left[\text{Arc tg } \frac{2\epsilon r_b}{1-r_b^2} - \text{Arc tg } \frac{2\epsilon r_a}{1-r_a^2} \right] \quad (31)$$

et nous aurons par conséquent :

$$\sqrt{\sigma^2} = \frac{24 P_o \ell^2}{\pi^3 b h^2} \frac{1}{\sqrt{r_b - r_a}} \sqrt{K} \quad (32)$$

C - REPOSE DE LA POUTRE SOUMISE A UNE EXCITATION DU TYPE "BRUIT BLANC" -

1 - Etude de l'impédance du système

1.1 - Calcul de l'impédance en fonction des caractéristiques de la poutre

Reconsidérons la poutre précédente soumise à une charge harmonique $P_0 e^{i\omega t}$ uniformément répartie. Pour le mode propre n , définissons l'impédance mécanique $Z_n(\omega)$ par la relation :

$$Z_n(\omega) = \frac{q_n(t)}{f_n(t)}$$

Nous avons trouvé que dans le cas de $p(x,t) = P_0 e^{i\omega t}$

$$q_n(t) = \frac{P_0 \ell}{n\pi} (1 - \cos n\pi) e^{i\omega t}$$

$$f_n(t) = \frac{2P_0 (1 - \cos n\pi)}{m\omega_n^2 \cdot n\pi} e^{i\omega t} \frac{(1 - r_n^2) - 2i\epsilon_n r_n}{(1 - r_n^2)^2 + 4\epsilon_n^2 r_n^2}$$

d'où :

$$Z_n(\omega) = \frac{1}{2} m\ell\omega_n^2 \frac{[(1 - r_n^2)^2 + 4\epsilon_n^2 r_n^2]}{[(1 - r_n^2) - 2i\epsilon_n r_n]}$$

soit

$$Z_n(\omega) = \frac{1}{2} m\ell\omega_n^2 [(1 - r_n^2) + 2i\epsilon_n r_n]$$

ou

$$Z_n(\omega) = \frac{1}{2} m\ell [(\omega_n^2 - \omega^2) + 2i\epsilon_n \omega \omega_n]$$

(33)

Cette expression est également semblable à celle obtenue pour le mouvement amorti d'une masse excitée harmoniquement.

1.2 - Expression de l'impédance complexe du système excité par une force impulsionnelle

Si dans le cas d'une impulsion unité à $t = 0$, $H(t)$ représente la réponse du système, le déplacement $f(t)$ de la poutre en son milieu, soumise à une force excitatrice $P(t)$, est alors donné par :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\tau) H(t-\tau) d\tau$$

Le changement de variable $t - \tau = v$ conduit à :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t-v) H(v) dv$$

Dans le cas d'une force harmonique $P(t) = P_0 e^{i\omega t}$ on obtient :

$$\begin{aligned} f(t) &= P_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(t-v)} H(v) dv \\ &= P_0 e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega v} H(v) dv \end{aligned}$$

mais $\frac{1}{Z(\omega)} = \frac{f(t)}{P(t)}$

d'où l'expression générale de l'impédance mécanique dans le cas d'une force harmonique quelconque :

$$\boxed{\frac{1}{Z(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega v} H(v) dv} \quad (34)$$

2 - Relation entre les spectres de puissance de l'excitation et de la réponse

2.1 - Définitions

Soit $z(t)$ une grandeur mesurée à l'instant t
et $z(t+\tau)$ cette grandeur mesurée à l'instant $t+\tau$

On appelle fonction d'autocorrélation notée $\overline{z(t).z(t+\tau)}$ la fonction définie par :

$$\boxed{\overline{z(t).z(t+\tau)} = \int_0^{+\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega} \quad (35)$$

où $S(\omega)$ représente le spectre de puissance de la grandeur $z(t)$ en fonction de la pulsation ω

Si $\overline{z(t).z(t+\tau)}$ ne dépend pas de t mais seulement de τ , le phénomène est dit stationnaire et on notera par exemple $\overline{z(t).z(t+\tau)} = \mathcal{C}(\tau)$

Pour $\tau = 0$, $\boxed{\overline{z^2(t)} = \int_0^{+\infty} S(\omega) d\omega} \quad (36)$

$\overline{z^2(t)}$ représente la valeur moyenne des carrés de $z(t)$

2.2 - Relation entre $P(\omega)$ et $F(\omega)$ [3]

Soient $P(\omega)$, $F(\omega)$ les spectres de puissance respectifs de $P(t)$ et $f(t)$ et $\Phi(\tau)$, $\Psi(\tau)$ les fonctions d'autocorrélation de $P(t)$ et $f(t)$.

D'après les relations du paragraphe 1.2

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t-v) H(v) dv$$

$$f(t+\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t+\xi-v') H(v') dv'$$

La fonction d'autocorrélation pour $f(t)$ s'écrit :

$$\overline{f(t).f(t+\xi)} = \Psi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{P(t-v).P(t+\xi-v')} H(v).H(v') dv dv'$$

Compte tenu de la définition donnée par (35), il vient :

$$\overline{f(t).f(t+\xi)} = \Psi(\xi) = \int_0^{+\infty} F(\omega) . e^{i\omega\xi} d\omega$$

et
$$\overline{P(t-v).P(t+\xi-v')} = \Phi(\xi+v-v') = \int_0^{+\infty} P(\omega) . e^{i\omega(\xi+v-v')} d\omega$$

par conséquent :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) . e^{i\omega\xi} d\omega &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} P(\omega) . e^{i\omega(\xi+v-v')} H(v) . H(v') d\omega . dv . dv' \\ &= \int_0^{+\infty} P(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega v} H(v) dv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega v'} H(v') dv' \end{aligned}$$

mais d'après la relation (34) :

$$\frac{1}{Z(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega v} H(v) dv$$

donc
$$\frac{1}{Z^*(\omega)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+i\omega v'} H(v') dv' \text{ où } Z^*(\omega) \text{ représente le conjugué de } Z(\omega)$$

soit
$$\int_0^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega\xi} d\omega = \int_0^{+\infty} P(\omega) e^{i\omega\xi} \frac{1}{Z(\omega)} \cdot \frac{1}{Z^*(\omega)} d\omega$$

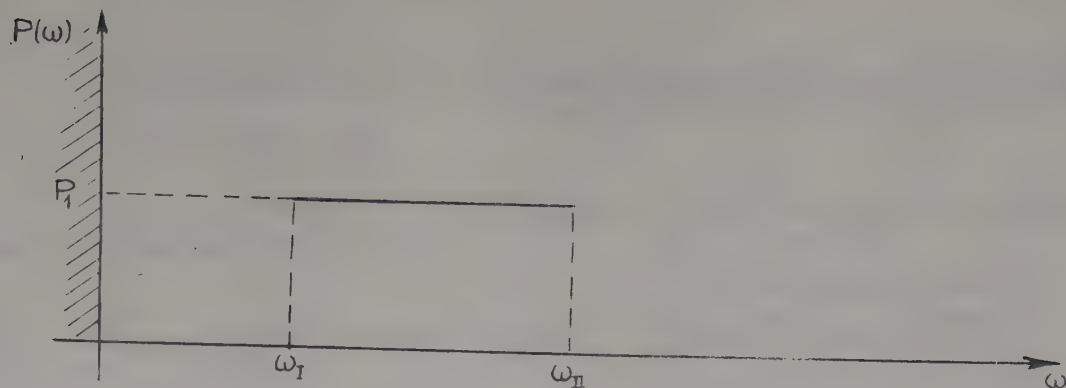
ce qui nous donne :

$$\boxed{F(\omega) = \frac{P(\omega)}{Z(\omega) . Z^*(\omega)} = \frac{P(\omega)}{|Z(\omega)|^2}} \quad (37)$$

3 - Application à une excitation "bruit blanc" avec 2 fréquences de coupure

3.1 - Relations entre les spectres de puissance

Dans le cas d'une excitation "bruit blanc" avec 2 fréquences de coupure, le spectre de puissance est le suivant :



c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} P(\omega) &= P_1 & \omega_I < \omega < \omega_{II} \\ &= 0 & \omega < \omega_I \quad \omega > \omega_{II} \end{aligned} \quad (38)$$

En prenant $\omega_I = (1-\lambda)\omega_1$ $\omega_{II} = (1+\lambda)\omega_1$ on envisage un filtrage dont les fréquences de coupure sont symétriques par rapport à la fréquence propre de la poutre.

Le spectre de puissance de la réponse s'en déduit immédiatement par la relation (37). Pour $\omega_I < \omega < \omega_{II}$

$$F(\omega) = \frac{P(\omega)}{|Z(\omega)|^2} = \frac{4 P_1}{m^2 l^2 [(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\epsilon^2 \omega^2 \omega_1^2]}$$

soit

$$F(\omega) = \frac{4 P_1}{m^2 l^2 [(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\epsilon^2 \omega^2 \omega_1^2]} = \frac{4 P_1}{m^2 l^2 \omega_1^4 [(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2]} \quad (39)$$

3.2 - Calcul de la moyenne des carrés de $P(t)$ et $f(t)$

3.2.1 pour $P(t)$

D'après la relation (36)

$$\overline{P^2(t)} = \int_0^{+\infty} P(\omega) d\omega = P_1 \int_{\omega_I}^{\omega_{II}} d\omega$$

soit

$$\overline{P^2(t)} = P_1 (\omega_{II} - \omega_I) \quad (40)$$

Pour $\omega_I = \omega_1 (1-\lambda)$, $\omega_{II} = \omega_1 (1+\lambda)$

$$\overline{P^2(t)} = 2 P_1 \lambda \omega_1$$

3.2.2 pour $f(t)$

$$\overline{f^2(t)} = \int_0^{+\infty} F(\omega) d\omega = \int_0^{+\infty} \frac{P(\omega)}{|Z(\omega)|^2} d\omega$$

$$\text{soit } \overline{f^2(t)} = \frac{4 P_1}{m^2 \lambda^2 \omega_1^3} \int_{r_I}^{r_{II}} \frac{dr}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}$$

$$\text{d'où } r_I = \frac{\omega_I}{\omega_1} \quad r_{II} = \frac{\omega_{II}}{\omega_1}$$

$$\boxed{\overline{f^2(t)} = \frac{4 P_1}{m^2 \lambda^2 \omega_1^3} \cdot K}$$

(41)

avec
$$K = \int_{r_I}^{r_{II}} \frac{dr}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}$$

Cette intégrale a déjà été calculée dans 2.4.2.

Sa valeur est la suivante :

$$\boxed{K = \frac{1}{8\beta} \ln \frac{(r_{II}^2 + 2\beta r_{II} + 1)(r_I^2 - 2\beta r_I + 1)}{(r_{II}^2 - 2\beta r_{II} + 1)(r_I^2 + 2\beta r_I + 1)} + \frac{1}{4\epsilon} \left[\text{Arc tg } \frac{2\epsilon r_{II}}{1-r_{II}^2} - \text{Arc tg } \frac{2\epsilon r_I}{1-r_I^2} \right]}$$

d'où la relation entre $\overline{f^2(t)}$ et $\overline{p^2(t)}$

$$\boxed{\overline{f^2(t)} = \frac{4 K}{m^2 \lambda^2 \omega_1^3 (\omega_{II} - \omega_I)} \overline{p^2(t)}}$$

(42)

Cas particulier : cas d'une excitation "bruit blanc" à largeur de bande étroite, c'est-à-dire $\lambda \ll 1$

Posons $r = 1 + \alpha$ avec $-\lambda \leq \alpha \leq \lambda$

$$K = \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{d\alpha}{\alpha^4 + 4\alpha^2 + 4\alpha^3 + 4\epsilon^2 + 8\alpha\epsilon^2 + 4\epsilon^2\alpha^2}$$

Pour le béton $\epsilon = 0,10$, en considérant α très petit, nous pouvons négliger les termes d'ordre ≥ 3 , ce qui nous donne :

$$K \approx \frac{1}{4} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \frac{d\alpha}{\alpha^2 + \epsilon^2} = \frac{1}{2\epsilon} \text{Arc tg } \frac{\lambda}{\epsilon}$$

soit :

$$\boxed{\overline{f^2(t)} = \frac{2 P_1}{m^2 \lambda^2 \omega_1^3 \epsilon} \text{Arc tg } \frac{\lambda}{\epsilon}}$$

3.3 - Détermination des fonctions d'autocorrélation de $P(t)$ et $f(t)$

3.3.1 pour $P(t)$

D'après la définition de la fonction d'autocorrélation donnée par la relation (35)

$$\Phi(\tau) = \text{partie réelle} \left[\int_0^{\infty} P(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right]$$

$$\text{avec } P(\omega) = 0 \text{ pour } \omega < \omega_I, \omega > \omega_{II}$$

$$= P_I \text{ pour } \omega_I < \omega < \omega_{II}$$

$$\text{soit } \Phi(\tau) = R \left[\frac{P_I}{i\tau} (e^{i\omega_{II}\tau} - e^{i\omega_I\tau}) \right] = \frac{P_I}{\tau} (\sin \omega_{II}\tau - \sin \omega_I\tau)$$

$$\text{d'où } \Phi(\tau) = \frac{2 P_I}{\tau} \cos \frac{\omega_I + \omega_{II}}{2} \tau \sin \frac{\omega_{II} - \omega_I}{2} \tau \quad (44)$$

Dans le cas où $\omega_I = \omega_1(1-\lambda)$, $\omega_{II} = \omega_1(1+\lambda)$ on a :

$$\Phi(\tau) = \frac{2 P_I}{\tau} \cos \omega_1 \tau \sin \lambda \omega_1 \tau$$

On vérifie que $\Phi(0) = 2 P_I \lambda \omega_1 = \overline{P^2(t)}$

$$\text{et } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Phi(\tau) = 0$$

3.3.2 pour $f(t)$

$$\Psi(\tau) = \text{partie réelle} \left[\int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \right]$$

$$\text{mais } F(\omega) = \frac{P(\omega)}{|Z(\omega)|^2} \text{ avec } \frac{1}{|Z(\omega)|^2} = \frac{4}{m^2 \ell^2 \omega_1^4 [(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2]}$$

$$\text{d'où } \Psi(\tau) = \frac{4 P_I}{m^2 \ell^2 \omega_1^3} R \left\{ \int_{r_I}^{r_{II}} \frac{e^{ir\omega_1\tau}}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2} dr \right\}$$

$$\text{avec } r_I = \frac{\omega_I}{\omega_1}, \quad r_{II} = \frac{\omega_{II}}{\omega_1}, \quad r = \frac{\omega}{\omega_1}$$

Application au cas d'une excitation "bruit blanc" à bande étroite

Pour $r \in [(1-\lambda), (1+\lambda)]$, posons $r = 1 + \alpha$ avec $-\lambda \leq \alpha \leq \lambda$

En négligeant les termes petits d'ordre ≥ 3 , nous obtenons :

$$\frac{e^{ir\omega_1\tau}}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2} \approx \frac{e^{i\omega_1\tau}}{4} \frac{e^{i\omega_1\tau\alpha}}{\alpha^2 + \epsilon^2}$$

ce qui nous donne la valeur approchée de $\Psi(\tau)$

$$\Psi(\tau) = \frac{P_1}{m^2 \ell^2 \omega_1^3} R \left[\begin{array}{c} +\lambda \frac{e^{i\omega_1 \tau(\alpha+1)}}{\alpha^2 + \epsilon^2} \\ -\lambda \end{array} d\alpha \right]$$

soit

$$\Psi(\tau) = \frac{P_1}{m^2 \ell^2 \omega_1^3} \left[\begin{array}{c} +\lambda \int \frac{\cos \omega_1 \tau(\alpha+1)}{\alpha^2 + \epsilon^2} d\alpha \\ -\lambda \int \frac{\sin \omega_1 \tau(\alpha+1)}{\alpha^2 + \epsilon^2} d\alpha \end{array} \right]$$

$$-\lambda \int \frac{\cos \omega_1 \tau(\alpha+1)}{\alpha^2 + \epsilon^2} d\alpha = \cos \omega_1 \tau \cdot -\lambda \int \frac{\cos \alpha \omega_1 \tau}{\alpha^2 + \epsilon^2} d\alpha - \sin \omega_1 \tau \cdot -\lambda \int \frac{\sin \alpha \omega_1 \tau}{\alpha^2 + \epsilon^2} d\alpha$$

La fonction $\frac{\sin \alpha \omega_1 \tau}{\alpha^2 + \epsilon^2}$ étant impaire, l'intégrale $-\lambda \int \frac{\sin \alpha \omega_1 \tau}{\alpha^2 + \epsilon^2} d\alpha$ est nulle.

$$\text{De même } -\lambda \int \frac{\cos \alpha \omega_1 \tau}{\alpha^2 + \epsilon^2} d\alpha = 2 \int_0^\infty \frac{\cos \alpha \omega_1 \tau}{\alpha^2 + \epsilon^2} d\alpha$$

Par conséquent :

$$\Psi(\tau) = \frac{2 P_1}{m^2 \ell^2 \omega_1^3} \cos \omega_1 \tau \int_0^\infty \frac{\cos \alpha \omega_1 \tau}{\alpha^2 + \epsilon^2} d\alpha$$

Le changement de variable $\xi = \frac{\alpha}{\lambda}$ conduit à l'expression :

$$\Psi(\tau) = \frac{2 P_1 \cos \omega_1 \tau}{m^2 \ell^2 \omega_1^3} \cdot \frac{\lambda}{\epsilon^2} \int_0^1 \frac{\cos \mu \xi}{\theta^2 \xi^2 + 1} d\xi$$

$$\text{avec } \mu = \omega_1 \tau \lambda \quad \theta = \frac{\lambda}{\epsilon}$$

ou si l'on veut,

$$\Psi(\tau) = \frac{2 P_1 \cos \omega_1 \tau}{m^2 \ell^2 \omega_1^3} \cdot \frac{\lambda}{\epsilon^2} \cdot L \quad \text{avec } L = \int_0^1 \frac{\cos \mu \xi}{\theta^2 \xi^2 + 1} d\xi \quad (45)$$

Calcul de L

La fonction $\frac{\cos \mu \xi}{\theta^2 \xi^2 + 1}$ ne présentant pas de problèmes de convergence et de continuité dans l'intervalle $[0,1]$, nous pouvons dériver par rapport à μ sous le signe somme.

$$\frac{dL}{d\mu} = \int_0^1 \frac{-\sin \mu \xi}{\theta^2 \xi^2 + 1} \cdot \xi d\xi$$

$$\frac{d^2 L}{d\mu^2} = - \int_0^1 \frac{\cos \mu \xi}{\theta^2 \xi^2 + 1} \xi^2 d\xi$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \theta^2 \frac{d^2 L}{d\mu^2} &= - \int_0^1 \cos \mu \xi \, d\xi + \int_0^1 \frac{\cos \mu \xi}{\theta^2 \xi^2 + 1} \, d\xi \\ &= - \frac{1}{\mu} \sin \mu + L \end{aligned}$$

On en déduit l'équation différentielle donnant L

$$\boxed{-\theta^2 \frac{d^2 L}{d\mu^2} + L = + \frac{1}{\mu} \sin \mu} \quad (46)$$

La solution générale de l'équation (46) sans second membre est donnée par :

$$L_1 = C_1 e^{\frac{\mu}{\theta}} + C_2 e^{-\frac{\mu}{\theta}} \text{ où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes, mais les valeurs de } C_1 \text{ et } C_2 \text{ ne peuvent être déterminées que par les conditions aux limites.}$$

Pour la solution particulière de l'équation complète, nous cherchons L(μ) sous forme d'un développement en série :

$$L(\mu) = a_0 + a_1 \mu^2 + \dots + a_n \mu^{2n} + a_{n+1} \mu^{2n+2} + \dots$$

$$\text{soit } \frac{d^2 L}{d\mu^2} = 2.1.a_1 + 3.2.a_2 \mu^2 + \dots + (2n+2)(2n+1) a_{n+1} \mu^{2n} + \dots$$

Le développement en série de $\frac{1}{\mu} \sin \mu$ étant :

$$\frac{1}{\mu} \sin \mu = 1 - \frac{\mu^2}{3!} + \frac{\mu^4}{5!} - \dots - (-1)^n \frac{\mu^{2n}}{(2n+1)!} \dots$$

l'identification des termes en μ^{2n} nous donne :

$$-\theta^2 (2n+2)(2n+1) a_{n+1} + a_n = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$$

$$\text{soit } a_{n+1} = \frac{(2n+1)! a_n - (-1)^n}{\theta^2 (2n+2)! (2n+1)}$$

où si l'on veut :

$$\boxed{a_n = \frac{(2n-1)! a_{n-1} + (-1)^n}{\theta^2 (2n)! (2n-1)}} \quad (47)$$

$$\text{soit } L = C_1 e^{\frac{\mu}{\theta}} + C_2 e^{-\frac{\mu}{\theta}} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu^{2n}$$

a_n étant défini par la relation de récurrence (47)

ce qui nous donne :

$$\boxed{\begin{aligned} \Psi(\tau) &= \frac{2 P_1}{m^2 \ell^2 \omega_1^3} \cos \omega_1 \tau \cdot \frac{\lambda}{\varepsilon^2} \left[C_1 e^{\frac{\mu}{\theta}} + C_2 e^{-\frac{\mu}{\theta}} + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu^{2n} \right] \\ \text{où } \theta &= \frac{\lambda}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \mu = \omega_1 \tau \lambda \end{aligned}} \quad (48)$$

Les valeurs de C_1 et C_2 sont déterminées à partir des conditions aux limites, c'est-à-dire que :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \Psi(\tau) = \overline{f^2(t)} = \frac{2P_1}{m^2 \ell^2 \omega_1^3 \varepsilon} \text{Arc tg } \frac{\lambda}{\varepsilon}$$

$$\text{et } \lim_{\tau \rightarrow \infty} \Psi(\tau) = 0$$

3.4 - Calcul de la valeur moyenne des carrés de la contrainte au milieu de la poutre

La réponse de la poutre à une excitation "bruit blanc" n'étant définie que par son spectre de puissance $F(\omega)$ et la moyenne des carrés de $f(t)$ c'est-à-dire $\overline{f^2(t)}$, il n'est donc pas possible de déterminer à chaque instant la valeur de $\sigma(t)$ au milieu de la poutre. Par contre, le calcul de $\overline{\sigma^2(t)}$ peut se déduire de celui de $\overline{f^2(t)}$. En effet, en considérant que la déformée de la poutre est toujours sinusoïdale, nous avons :

$$\sigma(t) = \frac{E \pi^2 h}{2 \ell^2} f(t)$$

$$\text{c'est-à-dire : } \overline{\sigma^2(t)} = \frac{E^2 \pi^4 h^2}{4 \ell^4} \overline{f^2(t)} = \frac{3 E m \omega_1^2}{bh} \overline{f^2(t)}$$

Compte-tenu de la valeur de $\overline{f^2(t)}$ obtenue dans (41), il vient :

$$\overline{\sigma^2(t)} = \frac{12 E P_1}{m \ell^2 b h \omega_1} K$$

avec :

$$K = \frac{1}{8\beta} \ln \frac{(r_{II}^2 + 2\beta r_{II} + 1)(r_I^2 - 2\beta r_I + 1)}{(r_{II}^2 - 2\beta r_{II} + 1)(r_I^2 + 2\beta r_I + 1)} + \frac{1}{4\varepsilon} \left[\text{Arc tg } \frac{2\varepsilon r_{II}}{1-r_{II}^2} - \text{Arc tg } \frac{2\varepsilon r_I}{1-r_I^2} \right] \quad (49)$$

Chapitre 2

ANALYSE DE LA RUPTURE PAR FATIGUE DU BETON

A - GENERALITES -

Après avoir donné quelques aperçus sur la théorie des vibrations des poutres, nous allons maintenant exposer quelques considérations générales relatives à la fatigue du béton.

On dit qu'un matériau subit un essai de fatigue quand il est soumis à des efforts alternés dont l'amplitude est inférieure à la résistance de rupture statique. Une éprouvette peut se rompre par fatigue quand elle est chargée en compression - traction, flexion ou torsion ... Le nombre de cycles nécessaire pour obtenir la fissuration, et par la suite la rupture, dépend du niveau imposé de contraintes. La détermination de ce nombre de cycles (ou de son logarithme) ainsi que la probabilité de rupture sous une contrainte donnée constituent le but principal des essais de fatigue.

Avant la rupture du béton, des microfissures apparaissent sur la fibre de la poutre soumise à la contrainte maximale de traction. Une majoration de contrainte prend alors naissance à proximité de cette première fissure, ce qui favorise la propagation plutôt que la formation de nouvelles fissures en des points où la contrainte est inférieure. La rupture des liaisons dans le béton peut se produire à l'intérieur de la pâte de ciment, surtout pour un béton humide ou de fabrication récente. Blakey a pensé que la fissure prenait naissance entre les particules de sable tandis que pour Kaplan elle se produisait entre les gros agrégats.

Une fois formée, la fissure se propage rarement suivant une ligne droite, mais en général contourne les agrégats. Jones a proposé l'existence d'une vitesse minimale de propagation au-dessous de laquelle la fissure s'arrête en rencontrant les agrégats. Mais il est aussi possible que la fissuration soit due à une irrégularité préexistante (retrait du béton, poche d'air ...) ou simplement la conséquence de l'hétérogénéité du béton.

B - THEORIES RELATIVES A LA FISSURATION -

1 - Théorie de Griffith [4]

En 1920, Griffith avait remarqué que la fissuration d'un matériau fragile était très influencée par la présence de microfissures, soit préexistantes, soit dues à l'application d'une charge. Il a proposé une théorie de la fissuration basée sur la considération des échanges entre l'énergie de déformation U et l'énergie superficielle W .

Soit une fissure elliptique de longueur $2c$ à travers une plaque infinie d'épaisseur unité, chargée de telle manière que, pour des régions éloignées de la fissure, il existe une contrainte uniforme σ . Les énergies de déformation et superficielle définies par Griffith sont exprimées par les relations suivantes :

$$U = \frac{\pi \sigma^2 c^2}{E} \quad \text{et} \quad W = 4 T c$$

où E représente le module d'Young du béton et T l'énergie superficielle par unité de surface de fissure.

Griffith a pensé que la fissure pourrait se propager et la poutre se rompre quand le taux de déformation - énergie - détente $G = \frac{dU}{dc}$ sera au moins égal au rapport d'augmentation d'énergie superficielle $\frac{dW}{dc}$ dû à la formation d'une nouvelle surface, c'est-à-dire $\frac{dU}{dc} \geq \frac{dW}{dc}$

soit

$$\sigma \geq \sqrt{\frac{2 E T}{\pi c}} \quad (50)$$

Irwin et Orowan contestèrent la validité de cette formule, car Griffith ne tenait pas compte de la dissipation d'énergie dans le domaine plastique. Ils proposèrent d'inclure dans l'énergie superficielle un terme correspondant au travail de déformation plastique.

2 - Théorie de Barenblatt [5]

Au lieu de faire appel à l'énergie superficielle comme Griffith, Barenblatt a défini un module C de cohésion du matériau.

Barenblatt a considéré les hypothèses suivantes pour l'étude des fissures :

1°) Pour une fissure, il existe 2 régions très distinctes au point de vue forces de cohésion :

- la région fissurée où les forces de cohésion sont négligeables
- la région où il y a seulement déformation et où les forces de cohésion sont importantes.

2°) Les dimensions de la région seulement "déformée" sont faibles vis-à-vis de celles de la fissure entière.

- Si le facteur d'intensité de contrainte défini par $I = \sqrt{\frac{E G}{\pi}}$ est élevé, il y a propagation de la fissure. Barenblatt a montré que, dans le cas de la propagation, I devait vérifier l'inéquation :

$$I \geq \frac{C}{\pi}$$

Willis a montré, à partir de la théorie de Muskhelishvili, l'identité des critères de propagation de fissure de Griffith et Barenblatt. Ceci a permis d'établir une relation entre le module de cohésion et l'énergie superficielle d'un matériau, soit :

$$C^2 = 2 \pi E T$$

C - ETUDE DE LA FONCTION "DOMMAGE" -

1 - Définition

Quand une éprouvette est soumise à des cycles de contrainte, elle subit un dommage progressif à mesure que le nombre N de cycles augmente. L'accroissement de N a donc pour conséquence d'élever la valeur de la fonction dommage D. A la rupture, la fonction D atteint la valeur 100 %. Mais D ne dépend pas seulement de N, elle est aussi fonction des caractéristiques du matériau et du niveau de contraintes. Il est également possible que pour un niveau donné, la rupture ne se produise pas quelque soit le nombre, même infini, de cycles. On dit alors qu'il existe une limite de fatigue, c'est-à-dire une contrainte minimale au-dessous de laquelle la rupture par fatigue est impossible.

2 - Théories relatives au dommage cumulatif

2.1 - Relation de Miner Palmgren [6]

Soit une poutre soumise à des essais de fatigue correspondant à des niveaux différents de contrainte. Supposons qu'il soit nécessaire, pour obtenir la rupture de la poutre, de la soumettre à N_1 cycles pour une contrainte σ_1 ou à N_2 cycles pour une contrainte σ_2 . Miner et Palmgren ont montré que si la poutre se rompt pour n_1 cycles sous σ_1 , puis n_2 cycles sous σ_2 , la relation suivante $\frac{n_1}{N_1} + \frac{n_2}{N_2} = 1$ était vérifiée.

Plus généralement, si N_i représente le nombre de cycles nécessaire pour obtenir la rupture de la poutre soumise à la contrainte σ_i , le dommage subit par cette poutre pour n_i cycles sous σ_i s'écrit :

$$D = \sum_i \frac{n_i}{N_i}$$

(51)

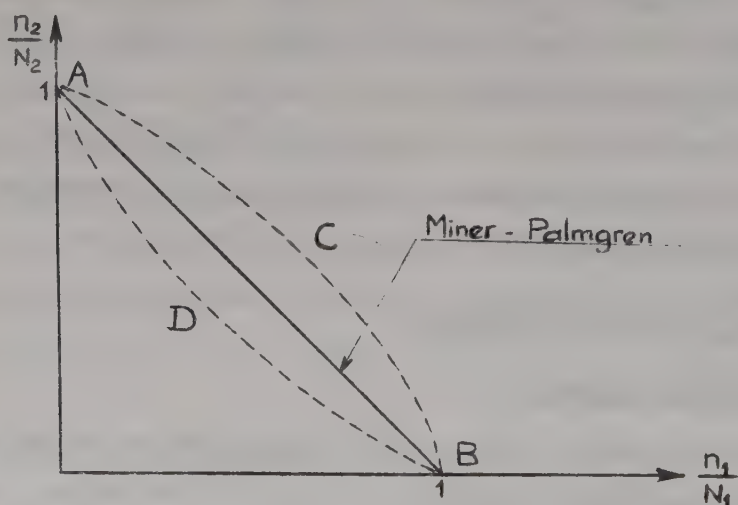
et $D = 1$ s'il y a rupture. Mais en général, cette équation n'est qu'approchée et d'autre part, les résultats des essais sont assez divergents.

2.2 - Théorie de Wilkins [7]

Wilkins a pensé que la relation donnant $\sum_i \frac{n_i}{N_i}$ n'était pas linéaire et que le résultat dépendait des niveaux de contrainte. Dans le cas général, la relation pourrait donc se mettre sous la forme :

$$\sum_i \frac{n_i}{N_i} = \xi \quad \text{où } \xi \text{ est une fonction non linéaire.}$$

Dans le cas de 2 niveaux différents de contraintes (σ_1, σ_2 avec $\sigma_1 < \sigma_2$), si la poutre est d'abord soumise à n_1 cycles sous σ_1 , puis ensuite à n_2 cycles sous σ_2 , on a $\sum_i \frac{n_i}{N_i} > 1$ (courbe A C B) tandis que pour le programme inverse $\sum_i \frac{n_i}{N_i} < 1$ (courbe A D B). La fonction ξ sera numériquement égale à 1 pour les valeurs $n_1 = N_1$, ou $n_2 = N_2$. Plus les niveaux de contrainte seront proches, plus la courbe tendra vers la linéarité.



2.3 - Théorie de Hilsdorf et Kesler [8]

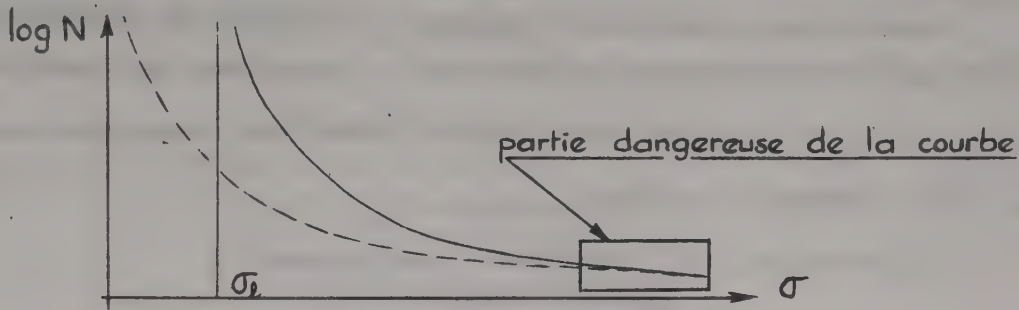
Hilsdorf et Kesler ont également tenté d'exprimer le dommage D à l'aide d'une formule mathématique. Ils ont déduit que pour une éprouvette soumise à n cycles sous une contrainte σ , D pouvait s'écrire sous la forme :

$D = \left(\frac{n}{N}\right)^\eta$ où N est le nombre de cycles nécessaire pour obtenir la rupture et η une fonction qui dépend du niveau de contrainte, la rupture se produisant évi-

demment pour $D = 1$.

3 - Accumulation de dommage - Contrainte équivalente pour un balayage

Dans le cas d'un diagramme de fatigue (σ, N) Shanley [9] a montré qu'il existait une relation entre N et σ du type $N(\sigma) \cdot \sigma^\delta = a$ où a et δ sont des coefficients déterminés expérimentalement. Si pour le matériau étudié il existe une limite de fatigue, la relation précédente devient $N(\sigma) \cdot (\sigma - \sigma_\ell)^\delta = a'$, σ_ℓ représentant la contrainte limite. Mais pour la partie dangereuse de la courbe (contrainte donnant une rupture rapide), nous pouvons considérer que les 2 courbes avec ou sans limite de fatigue sont pratiquement confondues (voir figure).



Supposons qu'à l'instant i , sous la contrainte σ_i , l'éprouvette soit soumise à n_i cycles. En considérant l'hypothèse de Miner-Palmgren, le dommage instantané se définit par :

$D_i = \frac{n_i}{N_i}$ où N_i représente le nombre de cycles nécessaire pour obtenir la rupture sous la contrainte σ_i . Finalement, au bout d'un cycle de balayage, le dommage "emmagasiné" sera égal à :

$$D = \sum_{\text{cycle}} \frac{n_i}{N_i}$$

Comme N_i est une fonction de σ_i

$$D = \sum_{\text{cycle}} n_i \frac{\sigma_i^\delta}{a}$$

On appelle contrainte équivalente σ_e la contrainte qui, exercée pendant le même temps, donnerait le même dommage, c'est-à-dire pendant un cycle par exemple :

$$\frac{\sigma_e^\delta}{a} \sum_{\text{cycle}} n_i = \sum_{\text{cycle}} n_i \frac{\sigma_i^\delta}{a}$$

soit

$$\sigma_e = \left[\frac{\sum_{\text{cycle}} n_i \sigma_i^\delta}{\sum_{\text{cycle}} n_i} \right]^{\frac{1}{\delta}}$$

Cette relation peut également s'exprimer sous une forme intégrale, étant donné que les valeurs de n_i sont proportionnelles à la densité $g(\sigma_i)$ de probabilités pour que la contrainte σ_i soit effectivement appliquée à la poutre. Ayant évidemment $\int g(\sigma) d\sigma = 1$, nous en déduisons :

$$\sigma_e = \left[\int g(\sigma) \sigma^\delta d\sigma \right]^{\frac{1}{\delta}}$$

3.1 - Application à une excitation sinusoïdale pour un balayage à vitesse constante

Dans ce cas, nous aurons également un balayage en contraintes et la probabilité $g(\sigma)$ sera constante quelque soit la contrainte appliquée et $g(\sigma) = \frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1}$ où σ_2 et σ_1 représentent respectivement les contraintes maximale et minimale pour le balayage utilisé.

L'expression de σ_e s'en déduit immédiatement :

$$\sigma_e = \left[\frac{1}{\sigma_2 - \sigma_1} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sigma^\delta d\sigma \right]^{\frac{1}{\delta}} = \left[\frac{\sigma_2^{\delta+1} - \sigma_1^{\delta+1}}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\delta + 1)} \right]^{\frac{1}{\delta}} \quad (52)$$

3.2 Application à une excitation bruit blanc à bande étroite

L'étude des vibrations aléatoires à bandes étroites fait appel pour la densité des probabilités à la distribution de Rayleigh, c'est-à-dire :

$$g(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma^2} e^{-\frac{\sigma^2}{\sigma^2}}$$

où $\sqrt{\sigma^2}$ représente la valeur efficace de la contrainte

d'où

$$\sigma_e^\delta = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^\infty \sigma^{\delta+1} e^{-\frac{\sigma^2}{\sigma^2}} d\sigma$$

soit

$$\sigma_e = \sqrt{2} \sqrt{\sigma^2} \left[\Gamma\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \right]^{\frac{1}{\delta}} \quad (53)$$

Γ représentant la fonction gamma

D - ANALYSE STATISTIQUE DE LA FATIGUE DU BETON -

Les résultats des essais de fatigue montrent toujours une dispersion importante pour le calcul du nombre N de cycles. On y remédie partiellement en considérant comme variable $\log N$ au lieu de N . Malgré tout, il est difficile de formuler des conclusions sur la donnée de quelques résultats, et, par conséquent, l'étude statistique apparaît comme un moyen permettant l'analyse du phénomène.

1 - Définition des variables statistiques utilisées

n poutrelles étant soumises à des essais de fatigue en flexion sous des conditions expérimentales identiques, appelons N_i le nombre de cycles nécessaire pour obtenir la rupture de la poutrelle n°i.

La valeur moyenne Z du logarithme du nombre de cycles pour les n essais est donnée par la relation :

$$Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log N_i \quad (54)$$

tandis que l'écart-type s est défini par :

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Z - \log N_i)^2}{n - 1}} \quad (55)$$

Le coefficient de variation c_v est égal en % au rapport de l'écart type et de la valeur moyenne :

$$c_v = 100 \frac{s}{Z} \quad (56)$$

2 - Théorie de Senik [10]

2.1 - Introduction

Généralement, le but des essais de fatigue est de déterminer le logarithme moyen du nombre de cycles ainsi que l'écart type de la distribution en vue de déduire la probabilité de rupture pour des conditions expérimentales données. Or, il arrive pour un faible niveau de contraintes qu'une partie des échantillons ne soit pas détruite et par conséquent les valeurs du logarithme moyen et de l'écart type sont indéterminées. Dans cette étude, Senik expose une méthode générale permettant de calculer les limites de ces valeurs à partir de courbes statistiques.

2.2 - Relations de Senik

Soit n poutrelles soumises à un essai donné de fatigue et suppo-

sons qu'au bout d'un certain nombre N_b de cycles, appelé base de l'essai, seulement r poutrelles sont détruites (durée de vie inférieure à N_b).

Nous utiliserons les notations suivantes :

Z : première estimation de la valeur moyenne de $\log N$ et définie par :

$$Z = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \log N_i$$

s : 1ère estimation de l'écart-type

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^r (Z - \log N_i)^2}{r - 1}}$$

Z_1, s_1 : secondes estimations de la valeur moyenne et de l'écart-type établies d'après la théorie de Senik

Z^*, s^* : valeur moyenne et écart-type exacts

$\overline{k_r^Z}, \overline{k_r^s}, \gamma_i, \beta_i, \mu_1, \mu_2$: notations statistiques de Senik

$$\chi = \frac{r}{n}$$

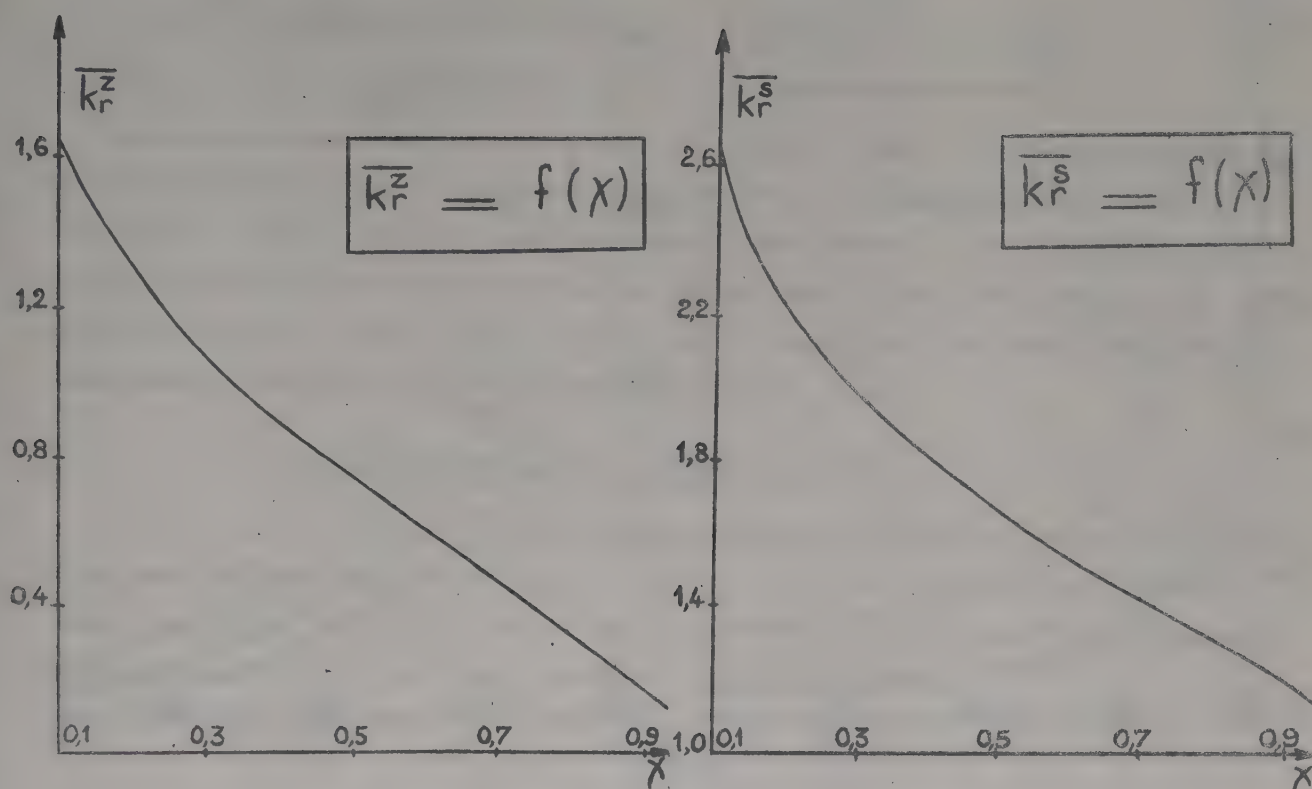
p : probabilité de rupture

Dans le cas d'une distribution normale, Senik a montré que les estimations Z, Z_1 de Z^* d'une part et s, s_1 de s^* d'autre part étaient reliées par les relations :

$$s_1 = s \cdot \overline{k_r^s}$$

$$Z_1 = Z + \mu_1 \cdot \overline{k_r^Z}$$

Les variations de $\overline{k_r^s}$ et $\overline{k_r^Z}$ en fonction de $\chi = \frac{r}{n}$ sont représentées sur les figures ci-après.



Variations de $\overline{k_r^Z}$ et $\overline{k_r^S}$ en fonction de χ

D'autre part, les limites inférieures et supérieures de Z^* et s^* sont données par les relations :

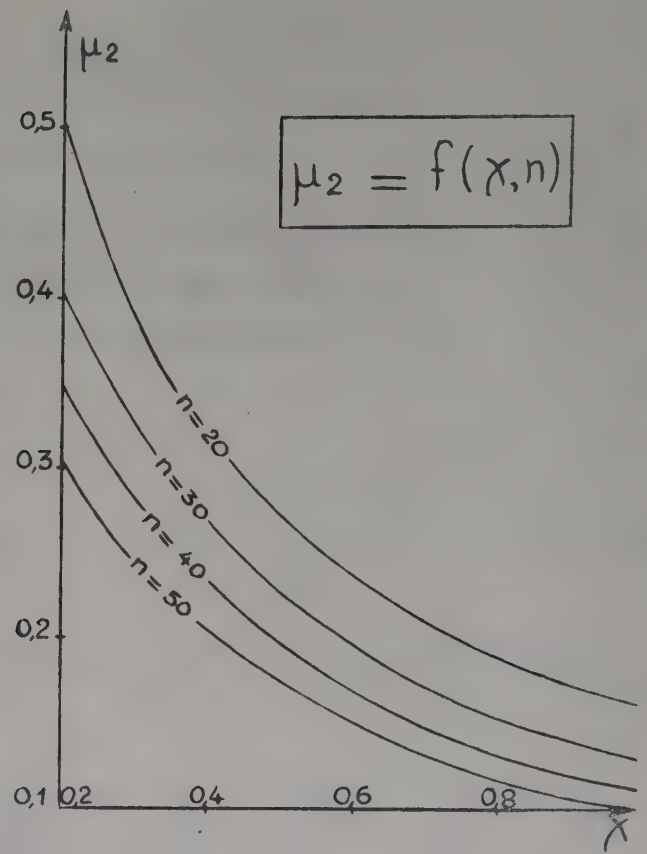
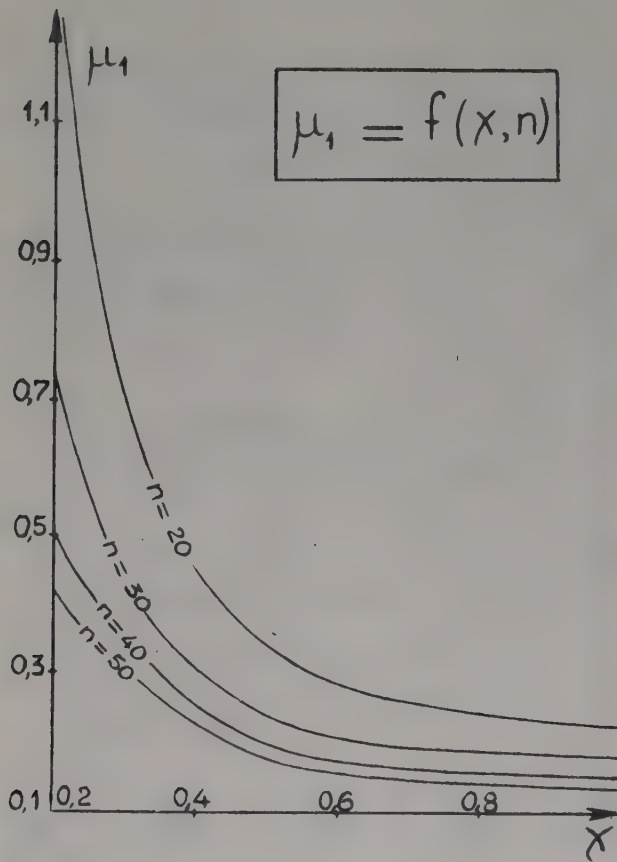
$$\begin{aligned} Z_1 + \mu_1 \gamma_1 s_1 < Z^* < Z_1 + \gamma_2 \mu_1 s_1 \\ \frac{s_1}{1 - \beta_1 \mu_2} < s^* < \frac{s_1}{1 - \beta_2 \mu_2} \end{aligned} \quad (57)$$

μ_1 et μ_2 (figures ci-après) sont fonctions de χ et n .

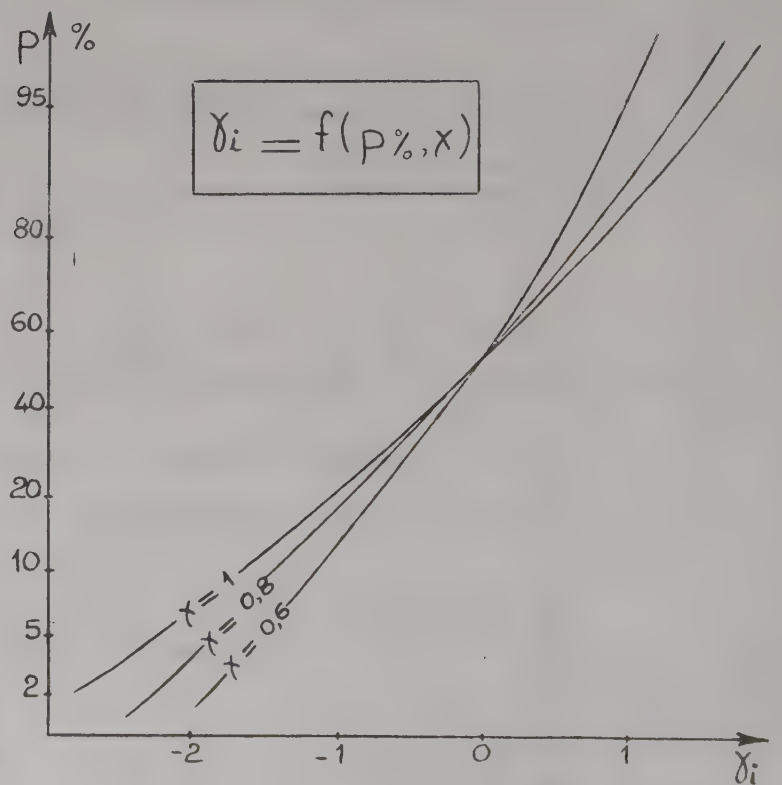
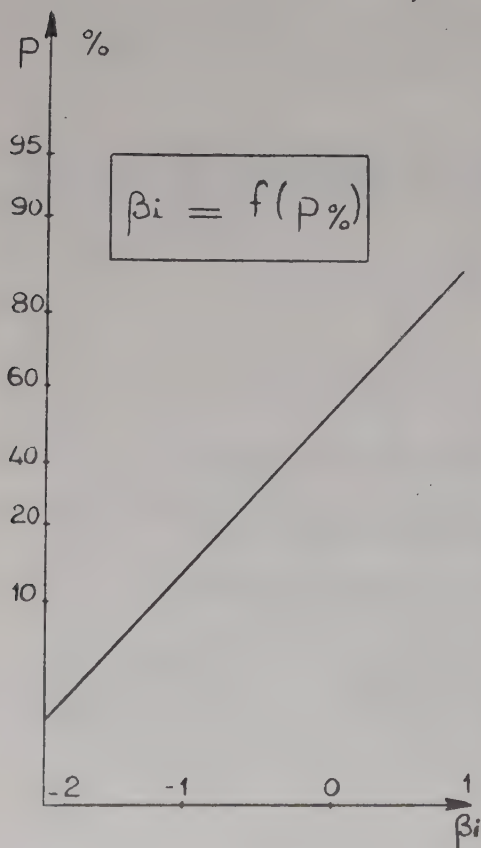
β_i (fig. p.34) ne dépend que de la fiabilité p désirée.

β_1 correspond à $\frac{1-p}{2}$ et β_2 à $\frac{1+p}{2}$. Par exemple, si on désire connaître les limites de Z^* et s^* avec une fiabilité de 90 %, β_1 correspond à 5 % et β_2 à 95 %.

γ_i (fig. p.34) varie avec p et χ



Variations de μ_1 et μ_2 en fonction de x et n



Variations de β_i en fonction de p

Variations de γ_i en fonction de x et de p

3 - Probabilité de rupture par fatigue

3.1 - Etude de la fiabilité

3.1.1 Définition

La fiabilité peut se définir comme la probabilité pour qu'un incident se produise ou ne se produise pas pour un phénomène au cours d'un intervalle de temps donné et pour des conditions données. Pour la rupture par fatigue du béton, problème qui nous intéresse, nous dirons par exemple que la fiabilité sera de 0,8 si 80 % des poutrelles soumises à un même programme de chargement donneront les résultats prévisibles.

3.1.2 Expressions de la fiabilité [11]

Soit n_o poutrelles soumises en flexion à un essai de rupture par fatigue. Supposons qu'à l'instant t , n_f poutrelles soient cassées, alors que les $n_s = n_o - n_f$ autres aient résisté à la fatigue. A cet instant, nous pouvons définir la fiabilité $F(t)$ par le rapport :

$$F(t) = \frac{n_s}{n_o} = \frac{n_s}{n_s + n_f} = 1 - \frac{n_f}{n_o}$$

De même, la probabilité de rupture (ou défiabilité) $p(t)$ s'écrit :

$$p(t) = \frac{n_f}{n_o} = \frac{n_f}{n_s + n_f}$$

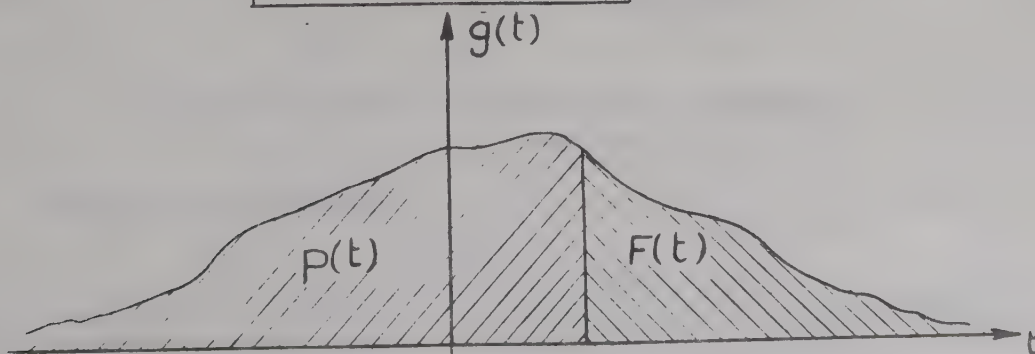
La fonction "densité de probabilité" se définit par :

$$g(t) = - \frac{dF(t)}{dt} = \frac{dp(t)}{dt}$$

Par conséquent, en intégrant nous obtenons $p(t) = \int_{-\infty}^t g(t) dt$.

Comme à chaque instant $p(t) + F(t) = 1$ et que d'autre part $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = 1$, nous déduisons :

$$F(t) = \int_t^{\infty} g(t) dt$$



3.1.3 Application à une distribution normale de Laplace - Gauss

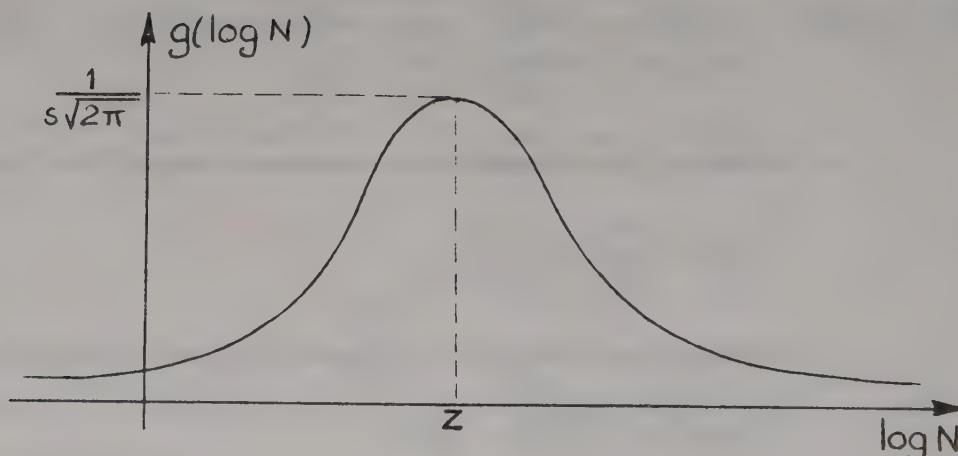
Si les valeurs des logarithmes des nombres de cycles nécessaires pour obtenir la rupture des n poutres obéissent à une loi de distribution normale de Laplace - Gauss, la fonction "densité de probabilité" est donnée par la relation :

$$g(\log N) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp \left[\frac{-(\log N - Z)^2}{2 s^2} \right] \quad (58)$$

où $\log N$ est la variable étudiée

$$\text{et } Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log N_i \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Z - \log N_i)^2}{n - 1}}$$

Cette fonction $g(\log N)$ est représentée par la courbe en "cloche" de Gauss, symétrique par rapport à $\log N = Z$



Les fonctions $p(\log N)$ et $F(\log N)$ sont alors définies par :

$$p(\log N) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\log N} \exp \left[\frac{-(\log N - Z)^2}{2 s^2} \right] d(\log N)$$

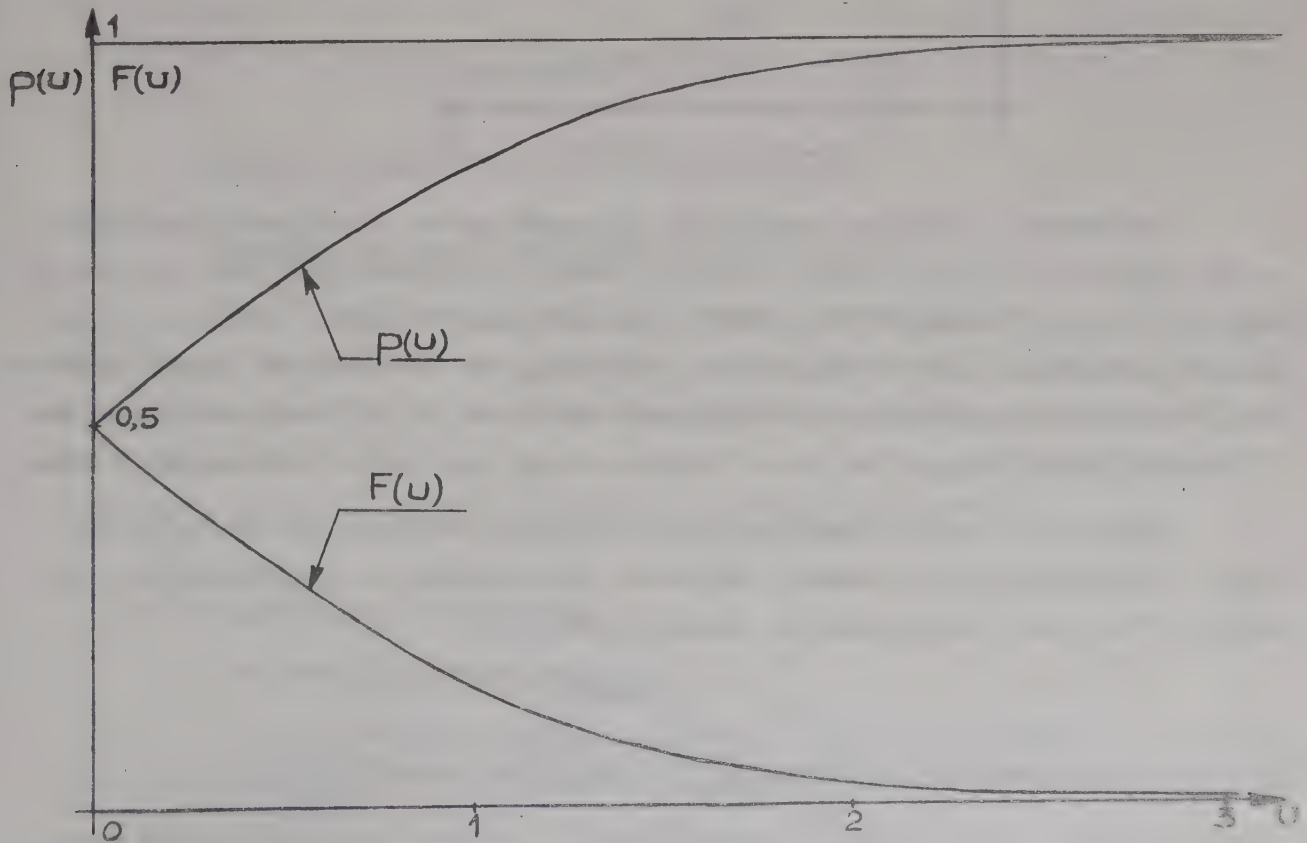
$$F(\log N) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{\log N}^{+\infty} \exp \left[\frac{-(\log N - Z)^2}{2 s^2} \right] d(\log N)$$

Le changement de variable $u = \frac{\log N - Z}{s}$ conduit à :

$$\begin{aligned} p(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du && \text{(fonction de Galton)} \\ F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \end{aligned} \quad (59)$$

Les valeurs de ces fonctions tabulées sont données dans le tableau suivant.

u	p(u)	F(u)	u	p(u)	F(u)
0	0,5	0,5	1,3	0,9032	0,0968
0,1	0,5398	0,4602	1,4	0,9192	0,0808
0,2	0,5792	0,4208	1,5	0,9332	0,0668
0,3	0,6179	0,3821	1,6	0,9452	0,0548
0,4	0,6554	0,3446	1,7	0,9554	0,0446
0,5	0,6914	0,3086	1,8	0,9640	0,0360
0,6	0,7257	0,2743	1,9	0,9713	0,0287
0,7	0,7580	0,2420	2,0	0,9772	0,0228
0,8	0,7881	0,2119	2,25	0,9878	0,0122
0,9	0,8159	0,1841	2,50	0,9938	0,0062
1,0	0,8413	0,1587	2,75	0,9970	0,0030
1,1	0,8643	0,1357	3,00	0,9986	0,0014
1,2	0,8849	0,1151			



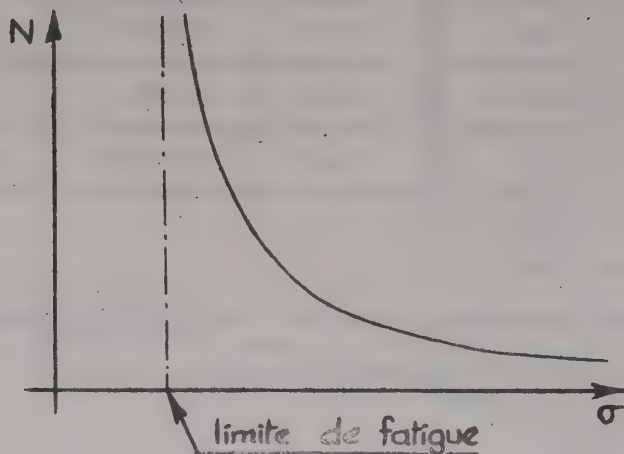
Pour les valeurs négatives de u , il suffit de prendre :

$$p(-u) = F(u)$$

E - RESEAU A 3 VARIABLES (NOMBRE DE CYCLES, CONTRAINTE APPLIQUEE, PROBABILITE DE RUPTURE) -

1 - Etude de Mac-Call [12]

Auparavant, on représentait les essais de fatigue sous forme de courbes dans un système de coordonnées (N, σ) , N étant le nombre de cycles nécessaire et σ la contrainte exercée sur le matériau pour obtenir la rupture au bout de N cycles. Si cette courbe admettait une asymptote verticale (voir figure), on disait qu'il existait une limite de fatigue pour le matériau étudié, sinon cette limite n'existait pas. Dans ce dernier cas, on pouvait quand même définir une résistance à la fatigue comme étant la résistance du matériau au bout d'un nombre de cycles donné.



Récemment, plusieurs chercheurs ont pensé qu'une représentation complète des essais de fatigue devait faire intervenir la probabilité p de rupture au même titre que le nombre N de cycles et la contrainte σ . Cette étude est d'un intérêt primordial pour le comportement ultérieur de la structure donnée soumise à des conditions expérimentales identiques. En effet, elle permet de déterminer la probabilité de rupture de cette structure pour les sollicitations de fatigue.

Mac-Call a tenté d'exprimer sous une forme mathématique une relation entre la contrainte σ de l'essai, le nombre N de cycles et la probabilité p de rupture. Pour lui, cette relation pouvait s'écrire :

$$F = 10^{-a} u_s^b (\log N)^c$$

où F est la probabilité de survie de l'échantillon, soit $F = 1-p$

u_s le rapport $\frac{\sigma}{\sigma_s}$ où σ_s est la résistance statique maximale

a,b,c des constantes à déterminer expérimentalement

Pour les valeurs de $N = 1$ et $N \rightarrow \infty$, les valeurs correspondantes de F sont respectivement $F = 1$ et $F \rightarrow 0$, tandis que pour $u_s = 0$ et $u_s = 1$ nous avons $F = 1$ et $F \rightarrow 0$.

Pour la détermination des constantes a,b,c il est nécessaire de transformer l'équation de Mac-Call en prenant les logarithmes des logarithmes des 2 membres, ce qui nous permet d'aboutir à une forme linéaire :

$$\log (-\log F) = \log a + b \log u_s + c \log (\log N)$$

En posant $X = \log u_s$ $Y = \log (-\log F)$ $Z = \log (\log N)$ et $A = \log a$, nous obtenons $Y = A + bX + cZ$

En évaluant les sommes suivantes $\sum_{1}^n X^2$, $\sum_{1}^n Y^2$, $\sum_{1}^n Z^2$, $\sum_{1}^n XY$, $\sum_{1}^n XZ$ et $\sum_{1}^n YZ$ (n : nombre d'échantillons), nous aboutissons à un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\sum_{1}^n XY = A + b \sum_{1}^n X^2 + c \sum_{1}^n XZ$$

$$\sum_{1}^n Y^2 = A + b \sum_{1}^n XY + c \sum_{1}^n YZ$$

$$\sum_{1}^n YZ = A + b \sum_{1}^n XZ + c \sum_{1}^n Z^2$$

Nous en déduisons A,b,c, d'où a.

Remarque au sujet de l'équation de Mac-Call

Dans la relation de Mac-Call, nous avons vu que pour $u_s = 0$ (c'est-à-dire $\sigma = 0$) nous avons $F = 1$, soit une probabilité de survie totale. Mais si on admet pour le béton l'existence d'une limite de fatigue, nous devrions également avoir une valeur de L égale à 1 pour $\sigma < \sigma_L$ où σ_L représente la limite de fatigue, or ceci n'apparaît pas dans la relation de Mac-Call.

2 - Etablissement des réseaux

2.1 - Théorie normale de Gauss

Pour l'établissement des réseaux ($\log N$, σ , p) dans le cas d'un balayage en fréquence, il est d'abord nécessaire de procéder au calcul des valeurs statistiques habituelles (valeur moyenne et écart-type). Les diagrammes

de fréquences et les réseaux de probabilités permettent alors de déduire les courbes de probabilités et les courbes isoprobabilités. Pour des essais à fréquence constante, le procédé serait strictement identique.

La détermination de Z et s par les relations (54) et (55) permet à partir de la formule de LAPLACE-GAUSS de déduire la probabilité de rupture :

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad \text{avec } u = \frac{\log N - Z}{s},$$

$p(u)$ représentant la probabilité de rupture pour l'essai considéré et pour un nombre N de cycles correspondant à $\log N$.

2.2 - Théorie de WEIBULL

2.2.1 Remarques sur la loi de distribution normale

Nous avons vu que, dans le cas d'une distribution normale, la probabilité de rupture que nous avons notée $p(\log N)$ pouvait s'écrire :

$$p(\log N) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\log N} e^{-\frac{(\log N - Z)^2}{2s^2}} d(\log N)$$

Par conséquent, l'application de cette relation pour le calcul d'une probabilité nulle de rupture conduit à $N = 0$. Or, il est très possible que, dans la pratique, un certain nombre de cycles, faible évidemment, mais non nul, nous donne également une probabilité de rupture nulle. Ainsi se trouve résumée l'opinion de WEIBULL au sujet de la loi normale valable pour les probabilités intermédiaires mais pas totalement satisfaisante pour les valeurs extrêmes. D'autre part, WEIBULL a montré que si une loi normale convient pour un modèle donné, cette même loi ne peut pas s'appliquer au modèle agrandi.

2.2.2 Méthode de WEIBULL [13]

Soit n éprouvettes soumises à un essai de fatigue sous des conditions expérimentales données. Rangeons ces éprouvettes par ordre croissant de durée de vie. Ainsi à la 1ère éprouvette cassée correspondra le nombre $v = 1$ et à la dernière $v = n$.

WEIBULL ne fait pas d'hypothèses sur la distribution des résultats mais base uniquement son étude sur des notions de probabilités. Ainsi pour la v^e éprouvette, il a montré que la probabilité totale pour que la probabilité p de rupture se trouve dans l'intervalle $[p, p + dp]$ est égale à :

$$\frac{n!}{(v-1)! (n-v)!} p^{v-1} (1-p)^{n-v} dp$$

Ce résultat a permis à WEIBULL de déduire la fonction $E[p_v]$ "espérance de probabilité" correspondant à l'essai v et d'aboutir à la relation simple :

$$E[p_v] = \frac{v}{n+1}$$

Ainsi cette expression permet d'établir directement les courbes de probabilité de rupture en fonction du logarithme du nombre de cycles pour chaque type de chargement dynamique (contrainte σ). Il est alors possible de déduire de ces courbes les 2 autres réseaux ($\log N$ en fonction de σ à p constante et p en fonction de σ à $\log N$ constante) et ceci complète l'établissement d'un diagramme complet de fatigue à 3 variables (σ , p , $\log N$).

F - PROBABILITE DE DEPASSER UNE VALEUR DONNEE DE LA REPONSE DANS LE CAS D'UNE EXCITATION "BRUIT BLANC" -

Statistiquement, la réponse d'une structure à une excitation aléatoire ne peut être définie que par son spectre de puissance $F(\omega)$. Mais il est aussi nécessaire de connaître sa distribution dans le temps ainsi que la probabilité pour qu'une certaine valeur fixée soit ou ne soit pas dépassée. Dans le cas d'une distribution de GAUSS, la probabilité pour qu'une valeur x de la distribution soit supérieure à une valeur x_1 donnée est égale à :

$$p[x > x_1] = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-Z)^2}{2s^2}\right] dx$$

où Z et s représentent respectivement la valeur moyenne et l'écart-type de la distribution.

Le changement de variable $\xi = \frac{x-Z}{s}$ conduit à :

$$p[\xi > \xi_1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi_1}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$$

1 - Application au cas d'une excitation "bruit blanc"

Dans le cas d'une distribution de RAYLEIGH, la probabilité pour que la réponse $f(t)$ dépasse en valeur absolue une valeur donnée $f_1(t)$ est égale à :

$$p[|f(t)| > f_1(t)] = \int_{f_1(t)}^{+\infty} \frac{f(t)}{f^2(t)} \exp\left[-\frac{f^2(t)}{2f^2(t)}\right] df(t)$$

En posant $f_1(t) = k \sqrt{f^2(t)}$ et $\eta = \frac{f(t)}{\sqrt{f^2(t)}}$, nous aurons :

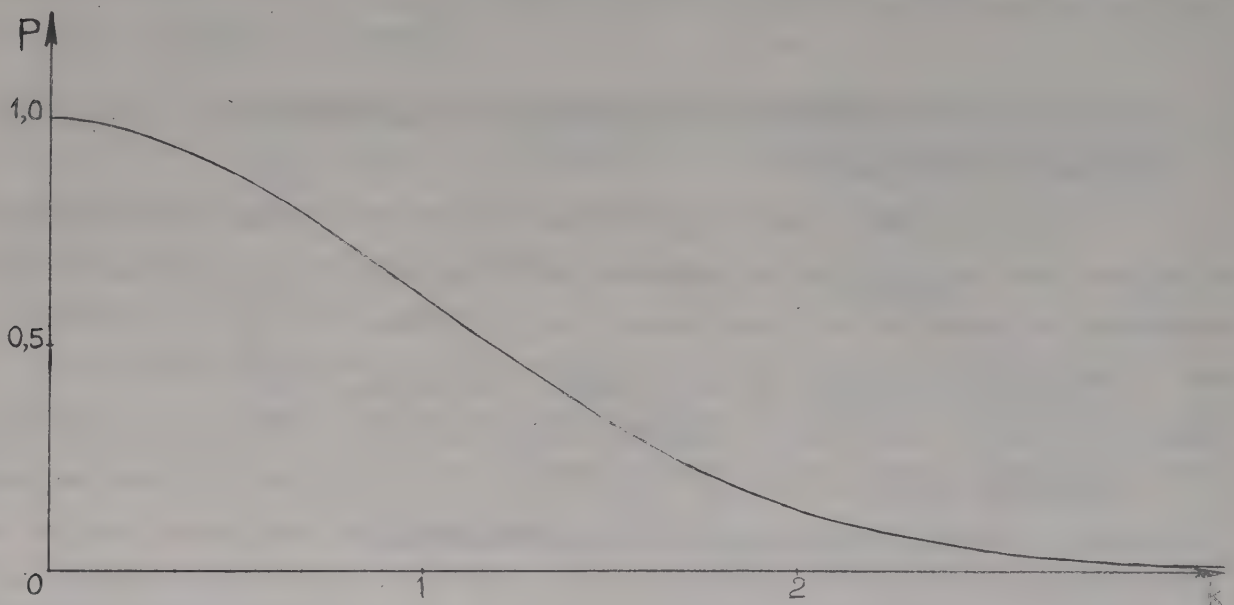
$$p[|f(t)| > k \sqrt{f^2(t)}] = \int_k^{+\infty} \eta e^{-\frac{\eta^2}{2}} d\eta$$

c'est-à-dire :

$$p[|f(t)| > k \sqrt{f^2(t)}] = e^{-\frac{k^2}{2}}$$

Le tableau ci-dessous nous montre pour quelques valeurs de k la probabilité p pour que l'amplitude $|f(t)|$ de la réponse dépasse une valeur égale à $k \sqrt{f^2(t)}$

k	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
p	1,000	0,882	0,606	0,325	0,135	0,044	0,011



L'inégalité de CHEBYCHEFF nous apporte également quelques précisions sur la limite de la probabilité

$$p[|f(t) - \overline{f(t)}| > k \sqrt{f^2(t)}] \leq \frac{1}{k^2}$$

où $\overline{f(t)}$ représente la valeur moyenne de la réponse.

2 - Fréquence des valeurs de la réponse supérieures à $k \sqrt{f^2(t)}$

D'après LIEPMANN [3], pour des valeurs élevées de k , la fréquence des valeurs supérieures à $k \sqrt{f^2(t)}$ est égale à :

$$\frac{N}{k \sqrt{f^2(t)}} = \frac{e^{-\frac{k^2}{2}}}{\pi} \left[\frac{\int_0^\infty \omega^2 F(\omega) d\omega}{\int_0^\infty F(\omega) d\omega} \right]^{1/2}$$

où $F(\omega)$ représente le spectre de puissance de la réponse $f(t)$.

avec
$$K = \frac{1}{8\beta} \ln \frac{(r_{II}^2 + 2\beta r_{II} + 1)(r_I^2 - 2\beta r_I + 1)}{(r_{II}^2 - 2\beta r_{II} + 1)(r_I^2 + 2\beta r_I + 1)} + \frac{1}{4\epsilon} \left[\text{Arc tg} \frac{2\epsilon r_{II}}{1-r_{II}^2} - \text{Arc tg} \frac{2\epsilon r_I}{1-r_I^2} \right]$$

Pour $r_I = 1-\lambda$, $r_{II} = 1+\lambda$, λ étant petit par rapport à 1, l'expression de K se réduit à :

$$K = \frac{\lambda}{4\beta} + \frac{1}{4\epsilon} \text{Arc tg} \frac{2\epsilon\lambda}{\epsilon^2 - \lambda^2}$$

soit
$$\int_0^\infty F(\omega) d\omega = \frac{P_1}{m^2 \ell^2 \omega_1^3} \left[\frac{\lambda}{4\beta} + \frac{1}{4\epsilon} \text{Arc tg} \frac{2\epsilon\lambda}{\epsilon^2 - \lambda^2} \right]$$

ce qui nous donne :

$$N_k \sqrt{f^2(t)} = \frac{e^{-\frac{k^2}{2} \omega_1}}{\pi} \left[\frac{\frac{\lambda}{4\beta} + \frac{1}{4\epsilon} \text{Arc tg} \frac{2\epsilon\lambda}{\epsilon^2 - \lambda^2}}{\frac{-\lambda}{4\beta} + \frac{1}{4\epsilon} \text{Arc tg} \frac{2\epsilon\lambda}{\epsilon^2 - \lambda^2}} \right]^{1/2}$$

En général, le terme $\frac{\lambda}{4\beta}$ est négligeable devant le second terme $\frac{1}{4\epsilon} \text{Arc tg} \frac{2\epsilon\lambda}{\epsilon^2 - \lambda^2}$, ce qui nous permet de donner une forme approchée de l'expression précédente :

$$N_k \sqrt{f^2(t)} \approx \frac{e^{-\frac{k^2}{2} \omega_1}}{\pi} = 2 e^{-\frac{k^2}{2}} \cdot f_1$$

Calculons $\int_0^\infty \omega^2 F(\omega) d\omega$

avec $F(\omega) = 0$ pour $\omega < \omega_I$ et $\omega > \omega_{II}$

et $F(\omega) = \frac{P_1}{|Z(\omega)|^2}$ pour $\omega_I < \omega < \omega_{II}$

Dans cette dernière hypothèse, nous avons déduit :

$$F(\omega) = \frac{4 P_1}{m^2 \ell^2 [(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + 4\epsilon^2 \omega^2 \omega_1^2]} = \frac{4 P_1}{m^2 \ell^2 \omega_1^4 [(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2]}$$

$$\text{soit } \int_0^\infty \omega^2 F(\omega) d\omega = \frac{4 P_1}{m^2 \ell^2 \omega_1} \int_{r_I}^{r_{II}} \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}$$

$$\text{Appelons } M = \int \frac{r^2 dr}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2} = \frac{1}{8\beta} \ln \frac{r^2 - 2\beta r + 1}{r^2 + 2\beta r + 1} + \frac{1}{4\epsilon} \text{Arc tg } \frac{2\epsilon r}{1-r^2}$$

$$\text{c'est-à-dire } \int_0^\infty \omega^2 F(\omega) d\omega = \frac{4 P_1}{m^2 \ell^2 \omega_1} [M]_{r_I}^{r_{II}}$$

Application au cas d'une excitation "bruit blanc" à bande étroite

Pour $r_I = 1-\lambda$ $r_{II} = 1+\lambda$

$$\left[\ln \frac{r^2 - 2\beta r + 1}{r^2 + 2\beta r + 1} \right]_{r_I}^{r_{II}} \neq -2\lambda$$

$$\text{et } \left[\text{Arc tg } \frac{2\epsilon r}{1-r^2} \right]_{r_I}^{r_{II}} \neq \text{Arc tg } \frac{2\epsilon \lambda}{\epsilon^2 - \lambda^2}$$

soit :

$$\int_0^\infty \omega^2 F(\omega) d\omega = \frac{P_1}{m^2 \ell^2 \omega_1} \left[\frac{-\lambda}{\beta} + \frac{1}{\epsilon} \text{Arc tg } \frac{2\epsilon \lambda}{\epsilon^2 - \lambda^2} \right]$$

D'autre part :

$$\int_0^\infty F(\omega) d\omega = \overline{f^2(t)} = \frac{4 P_1}{m^2 \ell^2 \omega_1^3} K$$

ETUDE EXPERIMENTALE

L'étude expérimentale a été entreprise aux Laboratoires de Génie Civil et de Mécanique des Structures de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes. Cette étude a porté sur la détermination des caractéristiques physiques (module d'Young, granulométrie, résistance statique à la flexion) et dynamiques (fréquences propres, contraintes dynamiques appliquées) des poutres soumises aux essais de fatigue. Ensuite, les essais ont été conduits dans le but d'approfondir l'influence des différents facteurs (excitation, dosage et âge du béton) sur la fatigue des poutres essayées.

A - RESULTATS D'ETUDES PRELIMINAIRES -

1 - Détermination des caractéristiques physiques des matériaux utilisés

1.1 - Densité des granulats

Pour un matériau donné, nous définissons les caractéristiques suivantes :

- densité sèche d_s : rapport de la masse des granulats et du volume total (vides et granulats)
- densité absolue d_a : rapport de la masse des granulats et du volume occupé par ces granulats.
- indice des vides $e = \frac{d_a - d_s}{d_s}$

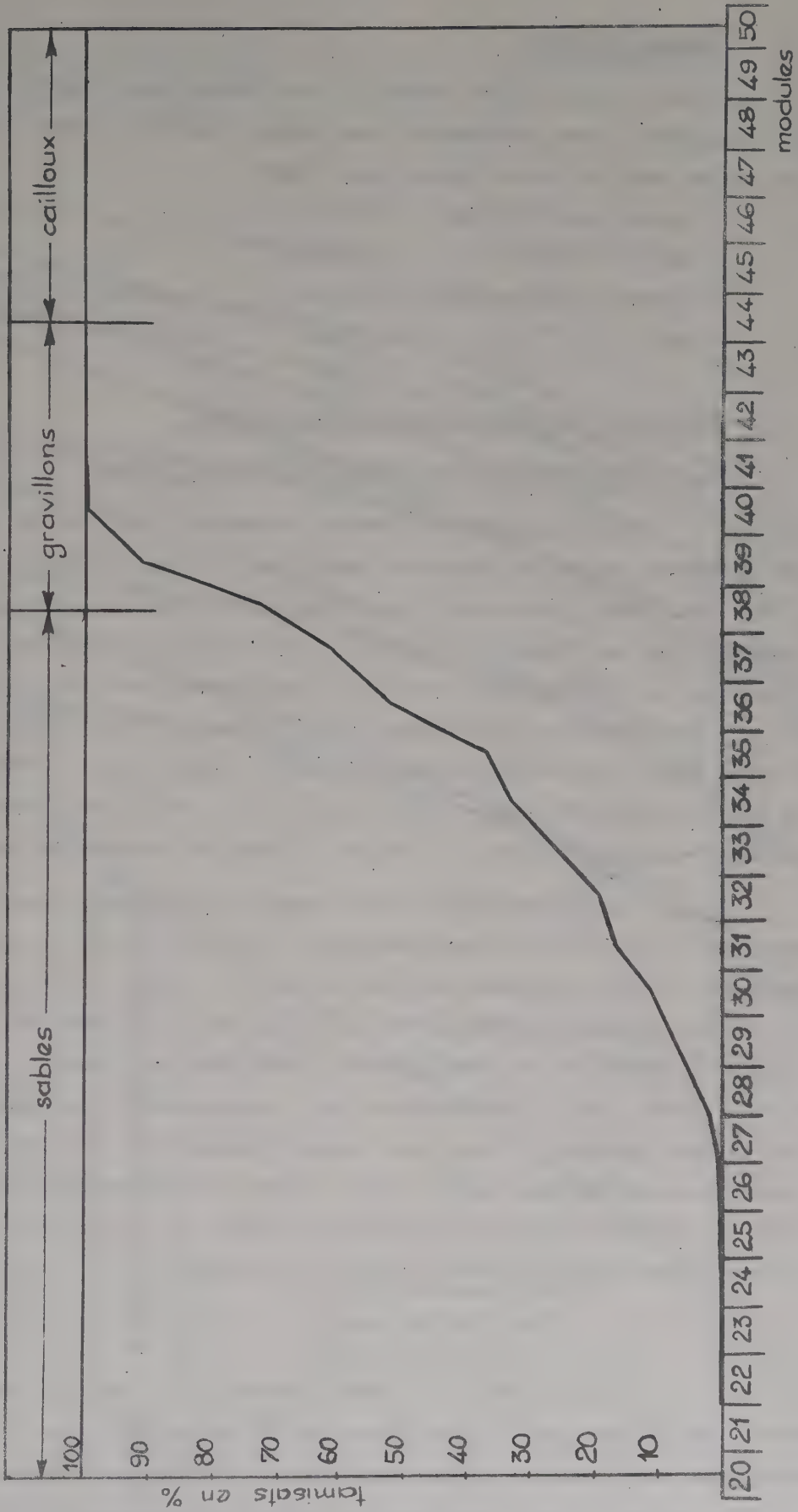
Pour les granulats utilisés, les valeurs de d_s , d_a , e , sont données dans le tableau suivant :

	d_s	d_a	e
gravillons 2-8 mm	1,45	2,88	1,02
Sable Loire	1,53	2,64	0,72

1.2 - Courbe granulométrique

L'analyse granulométrique du sable et des gravillons a été réalisée sur des tamis et passoires de modules 20 à 41 suivant la norme NF P 18-304. Pour cette étude, nous avons mélangé 1,200 kg de gravillons 2-8 mm et 0,680 kg de sable de Loire (dosage correspondant au béton utilisé). Les résultats (tamisats et pourcentages) sont donnés dans les tableaux ci-dessous.

Modules	passoires mm	Refus (g)	Tamisats (%)
41	12,5	0	100
40	10	7,4	99,61
39	8	136,2	92,37
38	Tamis 5	378,3	72,25
37	4	232,4	59,89
36	3,15	146,9	52,08
35	2,50	268,3	37,81
34	2	68,6	34,16
33	1,60	144,6	26,47
32	1,25	120,0	20,09
31	1,00	44,3	17,73
30	0,80	121,1	11,29
29	0,63	56,7	8,27
28	0,50	67,5	4,68
27	0,40	44,7	2,30
26	0,315	27,5	0,84
25	0,25	11,6	0,23
24	0,20	2,6	0,09
23	0,16	1,0	0,04
22	0,125	0,3	0,03



Courbe granulométrique des agrégats

1.3 - Dosage du béton

Pour la plupart des essais, c'est-à-dire pour ceux où la composition était considérée comme constante, nous avons étudié un béton dont la composition en poids pour un litre était la suivante :

- gravillons (2-8 mm) : 1,200 kg
- sable de Loire : 0,680 kg
- ciment (Lafarge 325): 0,450 kg
- eau : 0,180 l

1.4 - Résultats des essais statiques réalisés

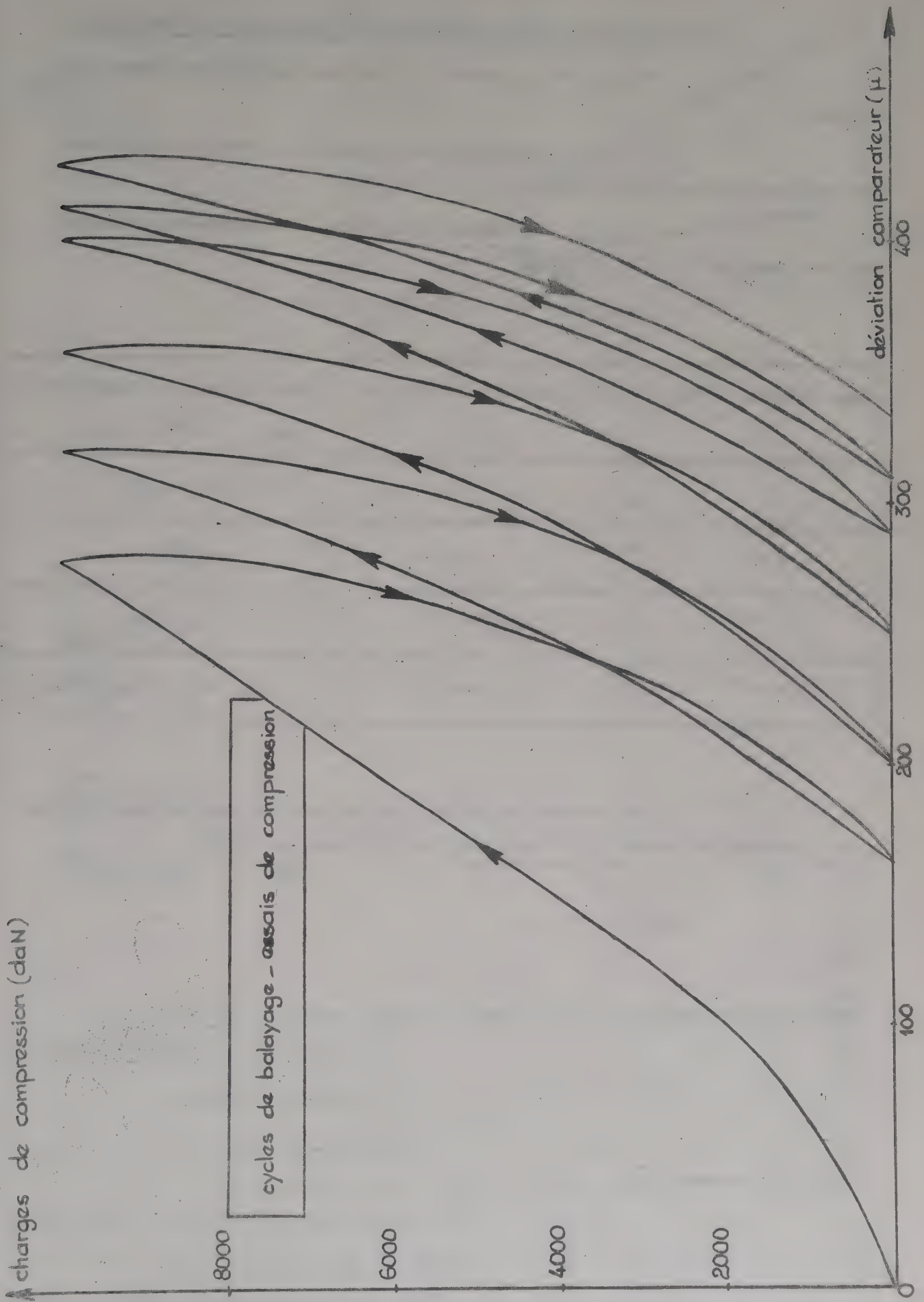
1.4.1 Détermination du module d'Young du béton

Lors des premiers essais relatifs à l'étude de la limite de fatigue du béton, certains résultats expérimentaux étant apparus discordants vis-à-vis des résultats théoriques, nous avons pensé que la valeur du module d'Young pouvait être un facteur d'erreur. En effet, pour les calculs initiaux, nous avons pris en considération les relations données par une circulaire du Ministère de l'Equipeement et du Logement [14], à savoir E (en bars) = $7000 \sqrt{\sigma_j'}$ pour une durée d'application de charge $>$ à 24 h, E (en bars) = $21000 \sqrt{\sigma_j'}$ pour une durée d'application de charge inférieure à 24 h, où σ_j' représente la résistance à la compression du béton à l'âge de j jours, σ_j' étant exprimée en bars.

Ces données ne faisant appel qu'à la résistance σ_j' du béton, nous avons jugé utile d'étudier en compression des cubes dont la composition était identique à celle utilisée pour les essais de fatigue. Les cubes ($10 \times 10 \times 10$ cm) étaient essayés entre les plateaux d'une machine Testwell Otto - Wolpert - Werke sur la sensibilité 10 000 daN. La lecture des déplacements était réalisée par l'intermédiaire de 2 comparateurs micrométriques solitaires du plateau supérieur. Nous avons soumis chaque cube à 6 cycles de chargement. Les résultats obtenus sont portés sur une courbe efforts-déplacements et la valeur du module d'Young a été déterminée sur le 6^e cycle de chargement, et nous avons trouvé pour le béton étudié (à 7 jours) :

$$E = 110\,000 \text{ bars}$$

Compte-tenu des écarts obtenus pour les différents essais, nous pouvons considérer que l'incertitude sur la valeur de E peut aller jusqu'à 10 %. Néanmoins, nous pensons qu'une étude plus poussée est nécessaire pour déterminer d'une manière plus rigoureuse la valeur de ce module d'Young.



1.4.2 Essais de rupture statique en flexion et en compression

Pour le béton étudié, le tableau suivant nous donne les valeurs :

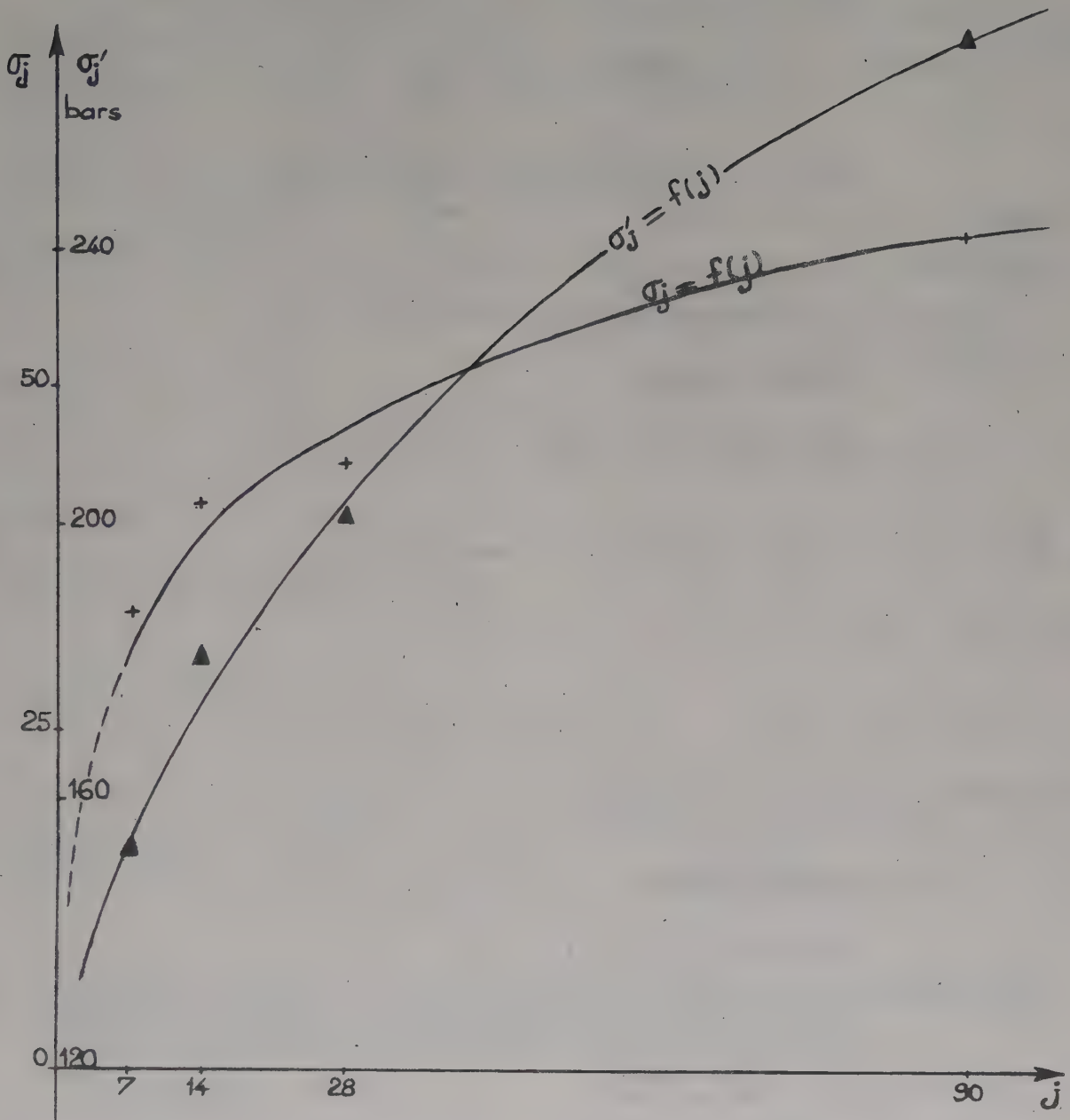
1°) de la résistance de rupture à la flexion déterminée sur des éprouvettes normalisées de $4 \times 4 \times 16$ cm.

2°) de la résistance de rupture à la compression établie sur des cubes de $14 \times 14 \times 14$ cm.

Ces valeurs sont calculées en bars.

âge du béton (jours)	Résistance à la flexion σ_j	Résistance à la compression σ'_j
$j = 7$	$\sigma_7 = 33,4$	$\sigma'_7 = 153$
$j = 14$	$\sigma_{14} = 41,8$	$\sigma'_{14} = 181$
$j = 28$	$\sigma_{28} = 44,7$	$\sigma'_{28} = 202$
$j = 90$	$\sigma_{90} = 61,8$	$\sigma'_{90} = 273$

Les courbes suivantes nous donnent les variations de σ_j et σ'_j en fonction du nombre j de jours de vieillissement du béton.



2 - Calcul de la fréquence propre du système et des contraintes dynamiques maximales soumises à la poutre

2.1 - Fréquences propres

2.1.1 Système non amorti

Nous avons vu que les pulsations propres d'une poutre appuyée à ses 2 extrémités sont données par la relation :

$$\omega_n = n^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^4}}$$

Pour le fondamental ($n = 1$), la fréquence propre s'exprime donc par :

$$f_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI}{m\ell^4}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{h}{\ell^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho}}$$

Dans le cas d'une poutre de section carrée ($b = h = 4 \text{ cm}$), de longueur $\ell = 50 \text{ cm}$, et de densité $\rho = 2,35 \text{ kg/dm}^3$, il vient pour $E = 110 \text{ 000 bars}$:

$$f_1 = 157 \text{ Hz}$$

Calculs d'erreur

$$\frac{\Delta f_1}{f_1} = \frac{1}{2} \frac{\Delta E}{E} + \frac{1}{2} \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta h}{h} + 2 \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

avec $\frac{\Delta E}{E} = 10 \%$, $\Delta \rho = 0,01 \text{ kg/dm}^3$, $\Delta h = 1 \text{ mm}$, $\Delta \ell = 1 \text{ mm}$

nous obtenons $\frac{\Delta f_1}{f_1} = 8,1 \%$

soit $\Delta f_1 = 12,7 \text{ Hz} < 13 \text{ Hz}$

c'est-à-dire $144 \text{ Hz} < f_1 < 170 \text{ Hz}$

2.1.2 Système amorti

$$\text{Appelons } f_1^* = \frac{\Omega_1}{2\pi} = f_1 \sqrt{1-\epsilon^2}$$

Pour le béton utilisé, nous avons $\epsilon = 0,1$, c'est-à-dire :

$$f_1^* = 156 \text{ Hz}$$

Calculs d'erreur

$$\text{Nous avons } \frac{\Delta f_1^*}{f_1^*} = \frac{\Delta f_1}{f_1} + \frac{\epsilon \Delta \epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$$

Pour $\Delta \epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ le 2^e terme ($5 \cdot 10^{-4}$) est négligeable devant $\frac{\Delta f_1}{f_1}$, c'est-à-dire que l'on peut considérer que :

$$\frac{\Delta f_1^*}{f_1^*} \approx \frac{\Delta f_1}{f_1}$$

Par conséquent, les 2 fréquences propres étant très voisines, nous utiliserons par la suite la valeur de f_1 seulement.

2.2 - Contraintes dynamiques

Dans le chapitre 1, nous avons établi pour les vibrations forcées amorties de la poutre que la contrainte dynamique maximale s'exprimait par la relation (28) :

$$\sigma_{\max} = \frac{24 P_o \ell^2}{\pi^3 b h^2} \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}}$$

avec $P_o = mg\alpha$ et $m = \rho b h$, nous obtenons :

$$\sigma_{\max} = \frac{24 \rho \ell^2 g}{\pi^3 h} \frac{\alpha}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}} = \frac{K_1 \alpha}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}}$$

Pour les valeurs numériques utilisées :

$$\rho = 2,35 \text{ kg/dm}^3 \quad \ell = 50 \text{ cm} \quad h = 4 \text{ cm}$$

nous avons $K_1 = 1,12 \text{ bars}$

$$\text{et } \frac{\Delta K_1}{K_1} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + 2 \frac{\Delta \ell}{\ell} + \frac{\Delta h}{h} = 3,4 \%$$

$$\Delta K_1 = 0,04 \text{ bar}$$

$$K_1 = (1,12 \pm 0,04) \text{ bars}$$

Pour connaître la valeur maximale de la contrainte, il suffit donc de se fixer d'une part, la fréquence f_e d'excitation, d'où la valeur de r , et d'autre part, l'accélération imposée à la poutre, c'est-à-dire α .

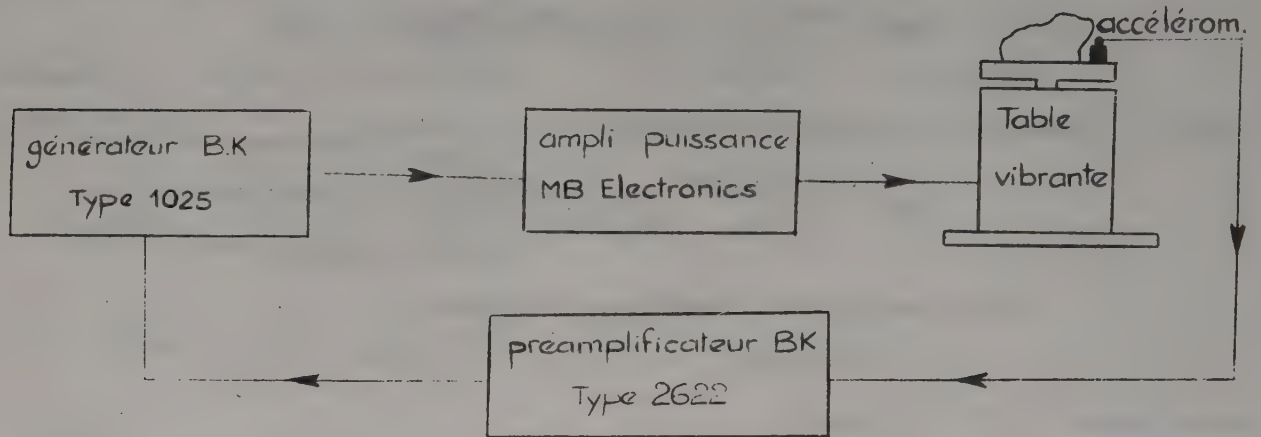
B - REPONSE DE LA POUTRE A UNE EXCITATION SINUSOÏDALE AVEC BALAYAGE EN FRE- QUENCES - DETERMINATION DE LA LIMITE DE FATIGUE DU BETON -

1 - Introduction

Cette étude a été entreprise au Laboratoire de Mécanique des Structures de l'E.N.S.M. de Nantes. Les poutres de dimensions $4 \times 4 \times 50 \text{ cm}$ soumises aux essais de fatigue s'appuyaient sur 2 raidisseurs soudés aux extrémités d'un fer en U, fixé sur la partie mobile de la table vibrante. Les poutres furent essayées à des niveaux différents de contraintes obtenus en faisant varier, soit l'accélération $A = g\alpha$ (et par conséquent la force excitatrice) imposée au système, soit la fréquence f (ou r) dont les données permettent de déterminer les contraintes dynamiques. Nous avons calculé, pour chaque éprouvette, le nombre de cycles nécessaire pour obtenir la rupture et essayer d'élaborer une loi de variation du phénomène en fonction des différents facteurs (excitation, âge du béton, composition). D'autre part, l'étude de la réponse de ces poutres à une excitation du type "bruit blanc" nous a permis de tirer certaines conclusions

et de comparer les résultats obtenus et ceux donnés par les essais en balayage.

Les essais, sauf ceux correspondant à une excitation "bruit blanc" ont été effectués sur une table vibrante "MB Electronics" dont le schéma réduit de fonctionnement est donné ci-dessous.



2 - Résultats expérimentaux obtenus pour une excitation sinusoïdale avec balayage en fréquences

Pour cette étude, nous avons procédé à un balayage en fréquences de 75 à 225 Hz à une vitesse angulaire de $30^\circ/\text{mm}$. Les premiers résultats obtenus étant assez diversifiés et ne permettant donc pas de tirer des conclusions définitives, il nous a semblé nécessaire d'augmenter le nombre d'essais en vue d'une étude statistique. C'est ainsi que 15 à 20 poutrelles furent essayées pour des conditions expérimentales identiques mais ce nombre a été limité surtout du fait de la longue durée des expériences. Les essais ont été effectués sur des éprouvettes de 7 jours.

La mesure du temps de rupture de la poutre i permet le calcul du nombre de cycles N_i et de son logarithme $\log N_i$. Dans le cas d'une distribution normale, les valeurs de Z , s , c_v sont calculées d'après les relations (54, 55, 56) sur machine à calculer "Olivetti Programma 101".

Le tableau suivant récapitule les résultats des essais de fatigue réalisés.

n° essai	1	2	3	4	5	6
$\frac{A}{g} = \alpha$	2	1,75	1,6	1,5	1,4	1,3
n (nombre poutres essayées)	20	20	17	15	16	13
r (nb poutres cassées)	20	20	17	15	15	13
N _{max} (nb maxi cycles)	45 000	92 000	19 8000	360 000	810 000	2 600 000
$Z = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \log N_i$	4,413	4,502	4,586	4,718	5,122	5,569
N _{moy} , (Z = log N _{moy})	25 900	31 800	38 500	52 200	132 400	426 000
$s = \sqrt{\frac{\sum (Z - \log N_i)^2}{r-1}}$	0,103	0,212	0,303	0,397	0,611	0,500
$c_v(\%) = 100 \frac{s}{Z}$	2,4	4,7	6,6	8,4	11,9	9,0

Pour $\alpha = 1,2$, au bout de 20 h, aucune des 5 poutrelles essayées n'était cassée.

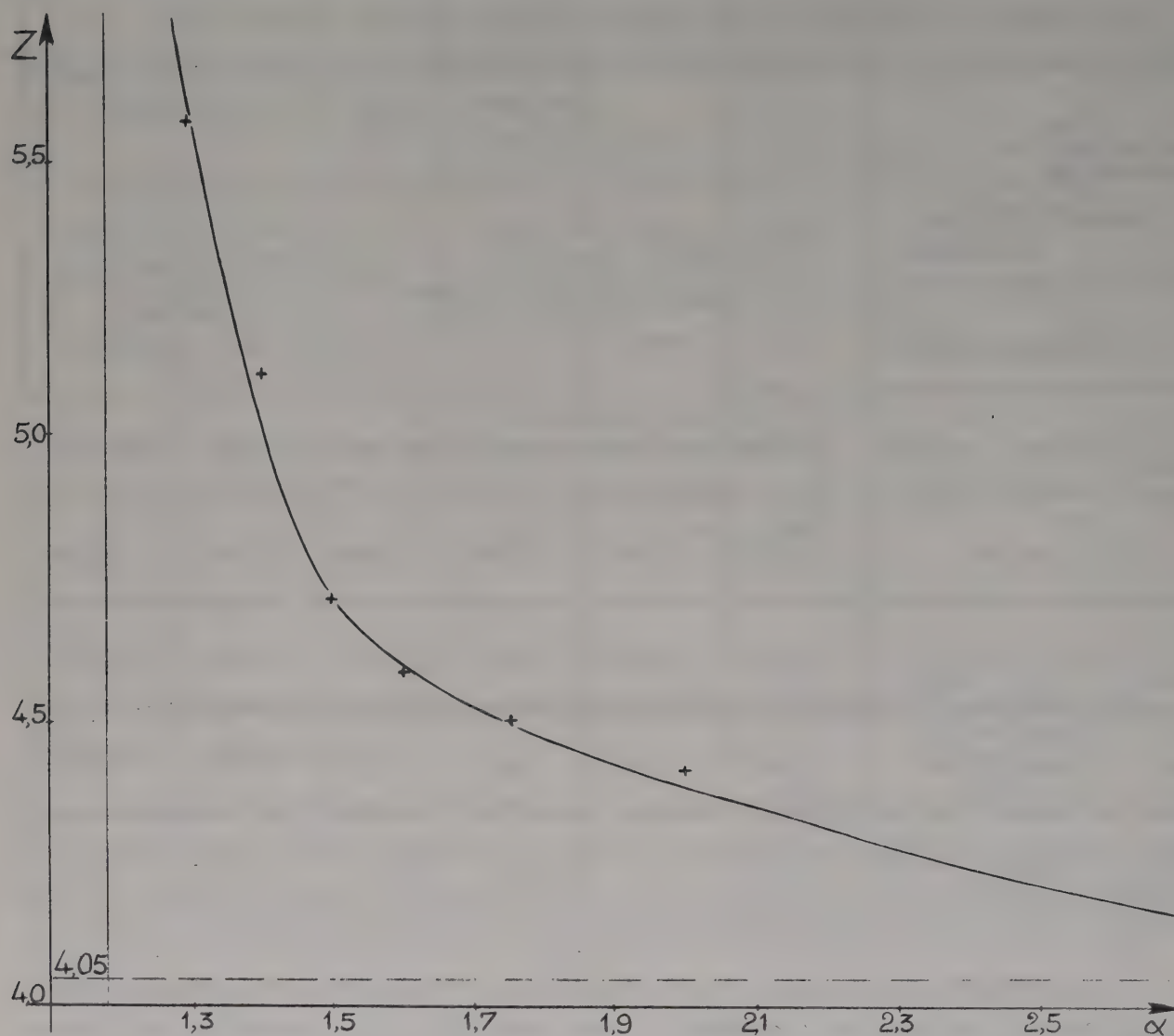
Les variations de Z en fonction de α sont données sur le graphe de la page suivante.

L'analyse de cette courbe de fatigue permet de constater l'existence d'une limite de fatigue pour le béton, c'est-à-dire qu'il existe un niveau d'amplitude au-dessous duquel la rupture ne peut pas se produire. Il est très difficile d'évaluer sur le graphe la position de l'asymptote, néanmoins nous pensons qu'elle doit se situer vers $\alpha = 1,18$.

La valeur de α correspondant à la rupture statique sera obtenue en considérant pour Z un 1/2 cycle de balayage. Comme la période de balayage est de 150 sec, nous aurons donc $Z = 4,051$, ce qui nous donne $\alpha \approx 3,5$.

Par conséquent, la limite de fatigue correspondant à une probabilité de 50 % sera pour un béton de 7 j. de l'ordre de 34 %. Mais, compte-tenu de la précision sur la détermination des valeurs limites de α , il faut remarquer que

la limite de fatigue n'est connue qu'au moins à 10 % près.



3 - Analyse des résultats obtenus

3.1 - Cas d'une distribution gaussienne

A partir des résultats obtenus, nous avons établi des diagrammes de fréquences en nous inspirant des travaux de G. DREUX [15] sur l'étude statistique de la résistance en compression des bétons exécutés pour la construction du pont de Tancarville. L'établissement d'un tel diagramme correspond à l'histogramme des fréquences obtenu en choisissant un intervalle $\log N$ donné. Ces diagrammes permettent aussi de tracer les réseaux de probabilités.

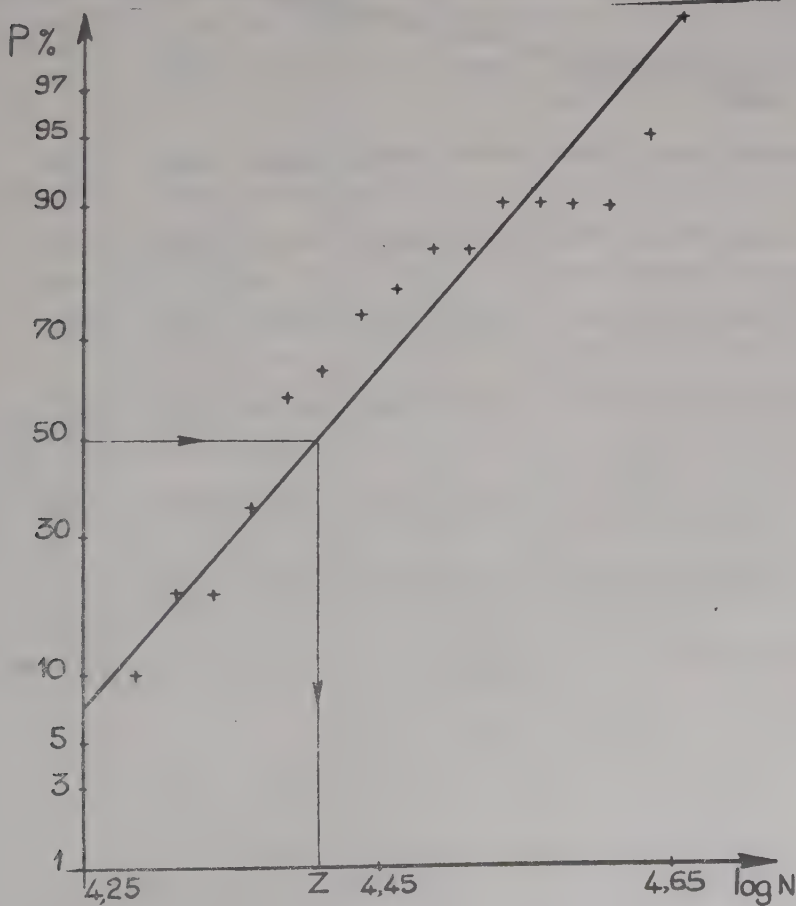
Dans le cas d'une distribution gaussienne, les réseaux de probabilités sont formés de droites dont la pente et l'ordonnée à l'origine sont déterminées par la méthode des moindres carrés.

Les résultats suivants correspondant à $\alpha = 2$ montrent un exemple de la méthode suivie.

log Ni	1	2	3	4	5	fréq. f	Σf	$\Sigma f \%$
4,275 à 4,30	+	+				2	2	10
4,30 à 4,325	+	+				2	4	20
4,325 à 4,35							4	20
4,35 à 4,375	+	+	+			3	7	35
4,375 à 4,40	+	+	+	+	+	5	12	60
4,40 à 4,425	+					1	13	65
4,425 à 4,45	+	+				2	15	75
4,45 à 4,475	+					1	16	80
4,475 à 4,50	+					1	17	85
4,50 à 4,525							17	85
4,525 à 4,55	+					1	18	90
4,55 à 4,575							18	90
4,575 à 4,60							18	90
4,60 à 4,625							18	90
4,625 à 4,65	+					1	19	95
4,65 à 4,675	+					1	20	100

Diagramme de fréquences

Essai 1, $\alpha = 2$, $n = 20$



Réseau de probabilités

Essai 1, $\alpha = 2$, $n = 20$

Les réseaux de probabilités correspondant à chaque valeur de α (et par conséquent de l'amplitude de l'excitation) permettent de déduire les courbes isoprobabilités ($\log N$ en fonction de α à p donné) et les courbes de probabilités (p en fonction de α à $\log N$ donné).

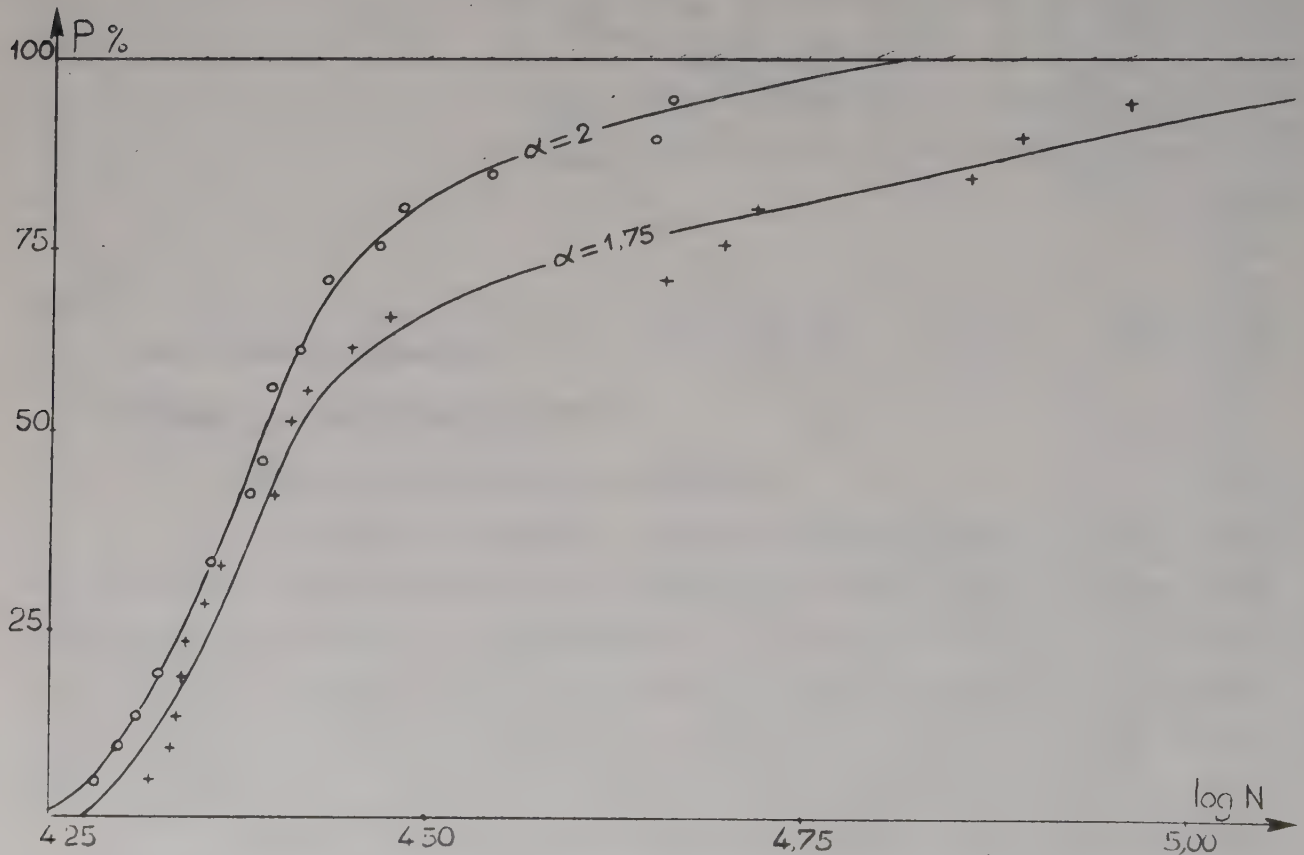
3.2 - Méthode de WEIBULL

Dans ce cas, les calculs préliminaires se limitent à la détermination des espérances de probabilités par l'application de la relation :

$$E[p_v] = \frac{v}{n+1}$$

La donnée de ces valeurs permet l'établissement du réseau de courbes $p = p(\log N)$ à α donné et par conséquent de déduire les 2 autres réseaux pour obtenir le diagramme de fatigue complet.

Les courbes de probabilité relatives à $\alpha = 2$ et $\alpha = 1,75$ sont représentées sur la figure ci-dessous.



3.3 - Etablissement du réseau à 3 variables (α , $\log N$, p)

Nous avons vu que par la donnée, soit des réseaux de probabilité (méthode de Gauss), soit des courbes de probabilité (méthode de Weibull), il était possible de déduire 2 variables en fonction de la 3^e.

Les tableaux suivants permettent de dresser un bilan comparatif des 2 méthodes.

Tableau I - Courbes isoprobabilités ($\log N$ en fonction de α à p donnée)

α P(%)	1,3		1,4		1,5		1,6		1,75		2,0	
	Gauss	Weib.	Gauss	Weib.	Gauss	Weib.	Gauss	Weib.	Gauss	Weib.	Gauss	Weib.
5	4,745	4,700	3,820	4,320	3,920	4,300	4,060	4,285	4,060	4,318	4,220	4,280
15	5,050	5,115	4,300	4,385	4,250	4,370	4,250	4,360	4,210	4,335	4,292	4,310
25	5,195	5,255	4,565	4,490	4,340	4,387	4,352	4,370	4,300	4,342	4,336	4,335
35	5,315	5,355	4,785	4,660	4,456	4,420	4,440	4,380	4,370	4,353	4,368	4,357
45	5,450	5,460	4,990	4,870	4,583	4,500	4,520	4,400	4,435	4,382	4,400	4,378
55	5,548	5,595	5,180	5,110	4,687	4,617	4,595	4,455	4,500	4,427	4,425	4,400
65	5,683	5,765	5,380	5,370	4,816	4,770	4,670	4,580	4,562	4,497	4,451	4,424
75	5,810	5,960	5,600	5,640	4,950	4,960	4,760	4,760	4,630	4,613	4,488	4,455
85	5,968	6,190	5,880	5,900	5,117	5,250	4,870	5,000	4,720	4,783	4,530	4,513
95	6,268	6,500	6,330	6,210	5,403	5,615	5,050	5,295	4,870	5,017	4,600	4,670

Tableau II - Courbes de probabilités (p en fonction de α à log N
donné)

α	1,3		1,4		1,5		1,6		1,75		2,0	
$\log N$	Gauss	Weib.	Gauss	Weib.	Gauss.	Weib.	Gauss	Weib.	Gauss	Weib.	Gauss	Weib.
4,40	1	3,7	19	17,5	30	30	30	45	39	49,5	45	55
4,60	2,5	4,2	26	31,5	46	53,5	55	66,5	70	74	95	92
4,80	7	6	35	42	64	66,5	79	76,5	91	86	////////	
5,00	12	10	45	50,5	78	76,5	94	85	98,5	94,5		
5,20	27,5	20,5	55	58,5	89	83,5	98,5	92	////////			
5,40	40	39,5	65	66	95	89	////////		97,5			
5,60	58	55,5	75	73,5	98	////////		////////				
5,80	75	67	83	81	////////							
6,00	87	77	88	88,5								
6,20	92	86	93	94,5								

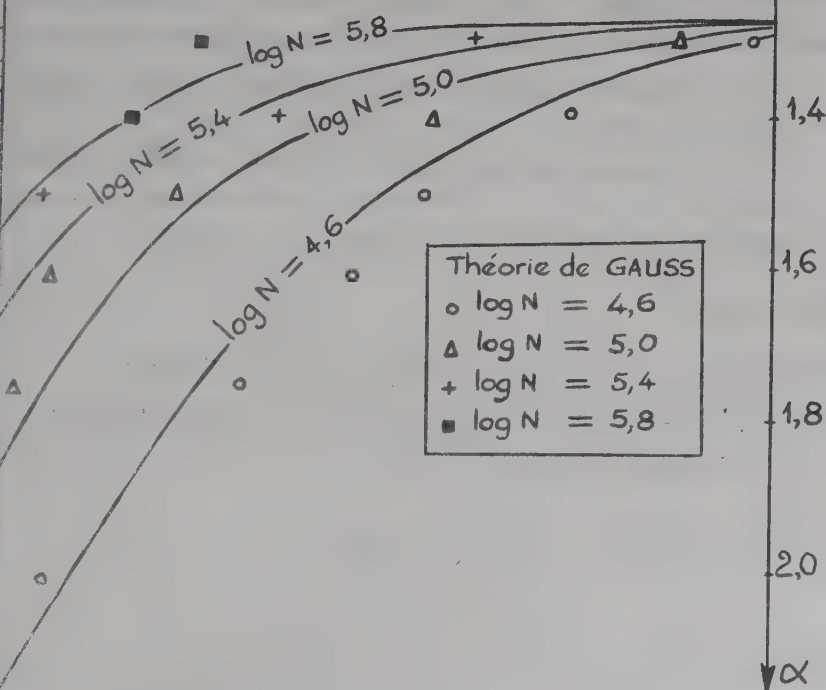
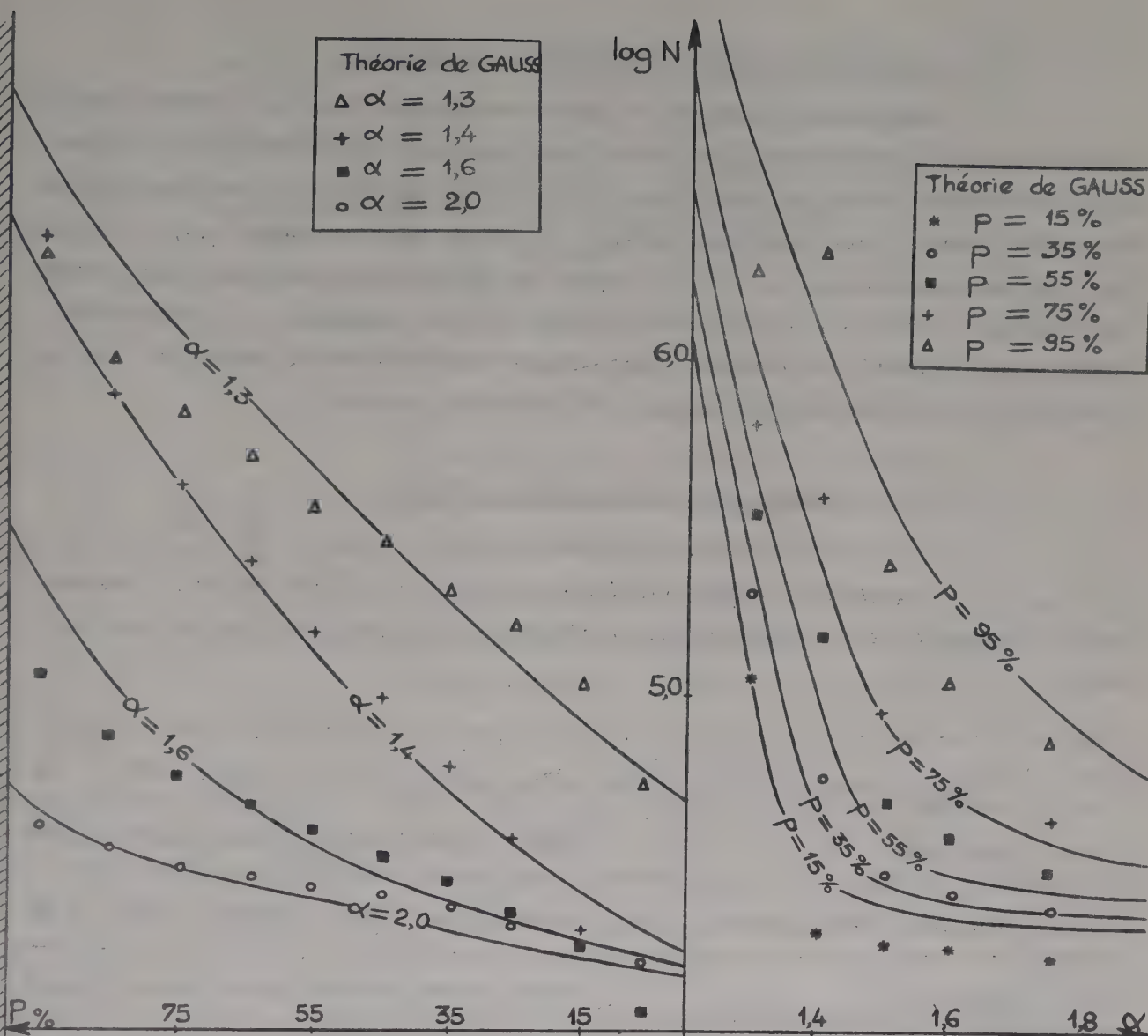
Ces valeurs nous permettent d'établir les réseaux de courbes à 3 variables (α , p et log N). Pour chaque type, les courbes tracées correspondent à la théorie de WEIBULL et les points représentés à la loi normale de GAUSS.

Cette étude permet donc non seulement de déduire les réseaux à 3 variables, mais également de comparer les 2 méthodes utilisées pour la détermination des probabilités de rupture. Le tableau II montre que les écarts varient suivant les probabilités, mais sont en général inférieurs à 10 %.

Théorie de GAUSS
 $\Delta \alpha = 1,3$
 $+ \alpha = 1,4$
 $\blacksquare \alpha = 1,6$
 $\circ \alpha = 2,0$

$\log N$

Théorie de GAUSS
 $* p = 15\%$
 $\circ p = 35\%$
 $\blacksquare p = 55\%$
 $+ p = 75\%$
 $\Delta p = 95\%$



Réseau de fatigue
à 3 variables ($\alpha, p, \log N$)

3.4 - Limites des valeurs statistiques calculées

Les valeurs moyennes et les écarts-types calculés correspondent à un maximum de 20 essais pour des conditions expérimentales identiques. Evidemment, ce nombre limité ne nous permet de justifier entièrement les conclusions formulées à partir des résultats obtenus. De même, dans certains cas, il arrive que pour un nombre donné de cycles toutes les éprouvettes ne soient pas cassées (par exemple pour $\alpha = 1,4$). En tenant compte de ces remarques, la méthode de SENIK permet à partir de courbes statistiques données dans le chapitre 2 de calculer les limites des valeurs moyennes et des écarts-types.

3.4.1 Valeurs des coefficients de SENIK

Pour la détermination des coefficients χ , $\overline{k_r^x}$, $\overline{k_r^s}$, μ_1 , μ_2 , β_1 , β_2 , γ_1 , γ_2 , nous nous sommes fixés un niveau de fiabilité de 90 %. Les valeurs obtenues à partir des courbes de SENIK sont données dans le tableau suivant.

α	$N_{\max}$ (cycles)	χ	$\overline{k_r^x}$	$\overline{k_r^s}$	μ_1	μ_2	β_1	β_2	γ_1	γ_2
1,3	2 600 000	1	0	1	0,285	0,200	-1,645	1,645	-2,17	1,66
1,4	810 000	0,94	0,125	1,16	0,258	0,198	-1,645	1,645	-2,02	1,65
1,5	360 000	1	0	1	0,263	0,204	-1,645	1,645	-2,17	1,66
1,6	198 000	1	0	1	0,253	0,191	-1,645	1,645	-2,17	1,66
1,75	92 000	1	0	1	0,226	0,164	-1,645	1,645	-2,17	1,66
2,0	45 000	1	0	1	0,226	0,164	-1,645	1,645	-2,17	1,66

3.4.2 Limites de Z^* et s^*

Les limites de Z^* et s^* (valeur moyenne et écart-type exacts) sont calculées à l'aide des relations (57) après avoir déterminé préalablement les valeurs de Z_1 et s_1 (estimations de Z^* et s^*).

$\alpha = 1,3$	$Z_1 = 5,569$ $s_1 = 0,500$	$5,259 < Z^* < 5,805$ $0,376 < s^* < 0,745$
$\alpha = 1,4$	$Z_1 = 5,158$ $s_1 = 0,709$	$4,788 < Z^* < 5,460$ $0,535 < s^* < 1,052$
$\alpha = 1,5$	$Z_1 = 4,718$ $s_1 = 0,397$	$4,491 < Z^* < 4,891$ $0,298 < s^* < 0,598$
$\alpha = 1,6$	$Z_1 = 4,586$ $s_1 = 0,303$	$4,420 < Z^* < 4,713$ $0,230 < s^* < 0,441$
$\alpha = 1,75$	$Z_1 = 4,502$ $s_1 = 0,212$	$4,398 < Z^* < 4,582$ $0,167 < s^* < 0,290$
$\alpha = 2,0$	$Z_1 = 4,413$ $s_1 = 0,103$	$4,363 < Z^* < 4,452$ $0,081 < s^* < 0,141$

Les résultats de ce tableau nous permettent de remarquer que, malgré le nombre relativement élevé de mesures (15 à 20) pour un même essai, nous obtenons une plage de variation assez étendue, l'écart-type pouvant varier même du simple au double. Cette constatation s'appuie aussi sur la dispersion des résultats obtenus pour un même essai.

4 - Contrainte équivalente durant le balayage

4.1 - Contrainte moyenne σ_{moy}

Nous avons vu (relation 30) que dans le cas d'un balayage défini par les fréquences de coupure f_a et f_b , la contrainte moyenne pouvait s'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{moy}} &= \frac{24 P_o \ell^2}{\pi^3 b h^2} \frac{1}{\sqrt{4-2\epsilon^2}} \frac{1}{r_b - r_a} \left[\text{Arg sh } \frac{2(r-1)}{\epsilon(r+1)} \right]_{r_a}^{r_b} \\ &= K_1 \propto \frac{1}{r_b - r_a} \left[\text{Arg sh } \frac{2(r-1)}{\epsilon(r+1)} \right]_{r_a}^{r_b} \frac{1}{\sqrt{4-2\epsilon^2}} \end{aligned}$$

où $r_a = \frac{f_a}{f_1}$ et $r_b = \frac{f_b}{f_1}$

f_1 représentant la fréquence propre du système

Pour le balayage considéré $f_a = 75 \text{ Hz}$ $f_b = 225 \text{ Hz}$ $f_1 = 157 \text{ Hz}$

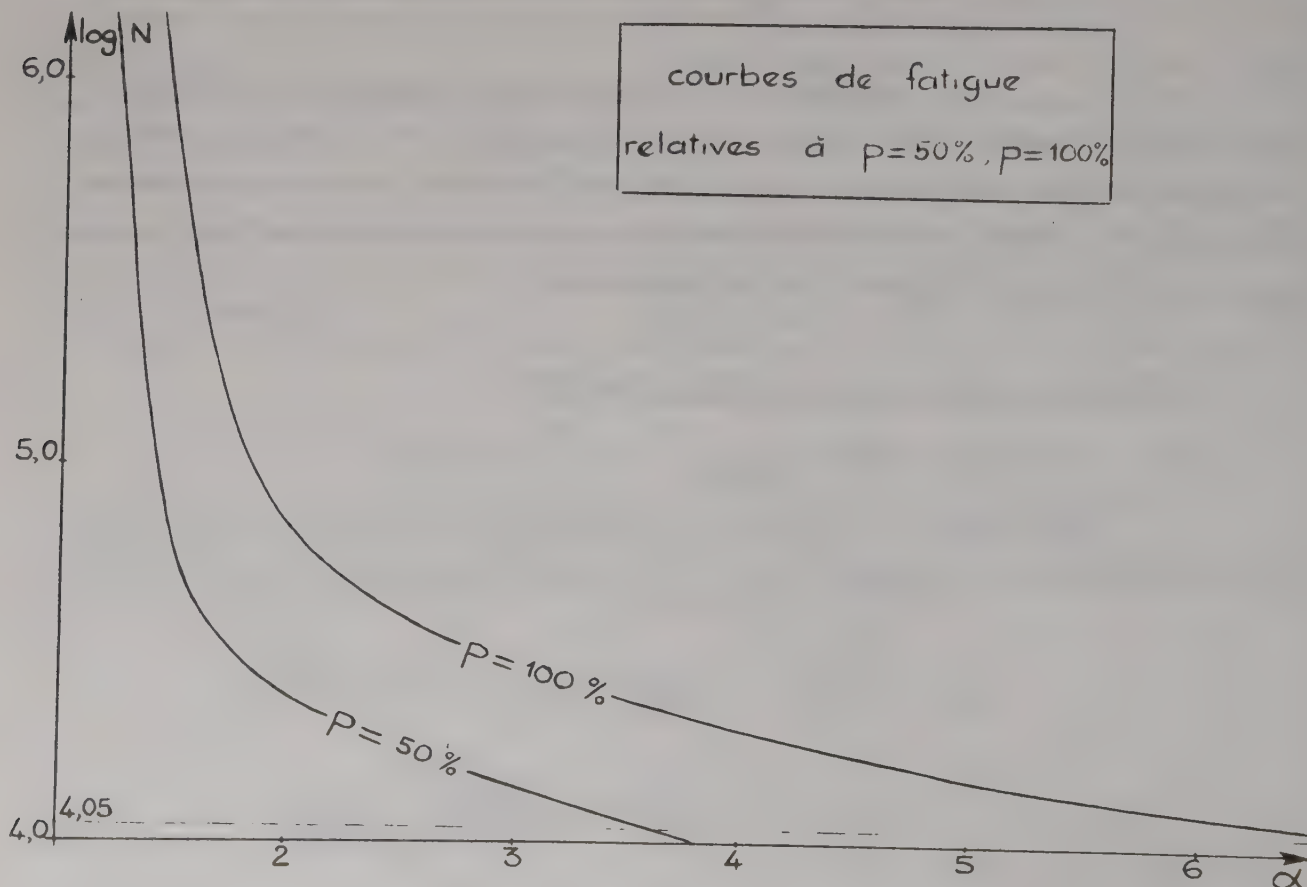
on a $\frac{1}{r_b - r_a} \frac{1}{\sqrt{4 - 2\epsilon^2}} \left[\text{Arg sh } \frac{2(r-1)}{\epsilon(r+1)} \right]_{r_a}^{r_b} = 2,38$

avec $K_1 = 1,12$, nous obtenons $\sigma_{\text{moy}} = 2,66 \alpha$

Cette valeur de α doit correspondre à la rupture statique, c'est-à-dire à la durée minimale de vie pour une rupture par fatigue avec une probabilité de 100 %.

Une extrapolation peut nous permettre de tracer la courbe de fatigue correspondant à une probabilité de rupture de 100 %. La valeur de α sera obtenue en considérant $\log N = 4,051$ (nombre de cycles pour un demi-cycle de balayage).

La valeur de α déterminée sur la courbe $p = 100 \%$ d'une manière peu précise sera de l'ordre de $\alpha = 7$. Ceci pourrait correspondre à la résistance statique maximale à la flexion, c'est-à-dire 35,4 bars. Or, pour $\alpha = 7$, nous obtenons $\sigma_{\text{moy}} \approx 18,6 \text{ bars}$.



4.2 - Contrainte efficace $\sqrt{\sigma^2}$

Nous avons vu dans le cas d'une excitation aléatoire qu'il n'est pas possible d'obtenir à un instant donné la valeur de la contrainte. Par contre, la contrainte efficace peut être déterminée. C'est pourquoi nous avons pensé dans un but de comparaison qu'il était également utile de calculer la contrainte efficace pour une excitation sinusoïdale avec balayage.

Dans ce cas, l'expression de $\sqrt{\sigma^2}$ est donnée par :

$$\sqrt{\sigma^2} = \frac{24 P_o \ell^2}{\pi^3 b h^2} \frac{1}{\sqrt{r_b - r_a}} \sqrt{K} = K_1 \propto \sqrt{\frac{K}{r_b - r_a}}$$

$$\text{avec } K = \frac{1}{8\beta} \ln \frac{(r_b^2 + 2\beta r_b + 1)(r_a^2 - 2\beta r_a + 1)}{(r_b^2 - 2\beta r_b + 1)(r_a^2 + 2\beta r_a + 1)} + \frac{1}{4\epsilon} \left[\text{Arc tg } \frac{2\epsilon r_b}{1-r_b^2} - \text{Arc tg } \frac{2\epsilon r_a}{1-r_a^2} \right]$$

Pour le balayage utilisé :

$$\sqrt{\frac{K}{r_b - r_a}} = 2,68$$

$$\text{c'est-à-dire } \sqrt{\sigma^2} = 1,12 \times 7 \times 2,68 = \underline{21,0 \text{ bars}}$$

Or, ces 2 contraintes (σ_{moy} et $\sqrt{\sigma^2}$) ont des valeurs très éloignées de la contrainte statique maximale. Ceci nous a conduit à analyser le phénomène d'accumulation de fatigue durant le balayage et à définir une contrainte équivalente σ_e .

4.3 - Contrainte équivalente σ_e

Dans le chapitre 2, nous avons déduit, compte-tenu de l'hypothèse de SHANLEY, la valeur de la contrainte équivalente σ_e (relation (52)) :

$$\sigma_e = \left[\frac{\sigma_2^{\delta+1} - \sigma_1^{\delta+1}}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\delta+1)} \right]^{\frac{1}{\delta}}$$

où σ_1 et σ_2 représentent respectivement les contraintes minimales et maximales dans le balayage

et δ un coefficient déterminé ultérieurement ($\delta = 9,4$)

$$\text{Comme } \sigma_i = K_1 \propto \frac{1}{\sqrt{(1-r_i^2)^2 + 4\epsilon^2 r_i^2}} = K_1 \propto A_i$$

nous déduisons :

$$\sigma_e = K_1 \alpha \left[\frac{A_2^{\delta+1} - A_1^{\delta+1}}{(A_2 - A_1)(\delta+1)} \right]^{\frac{1}{\delta}}$$

A varie de 0,85 (minimum) à 5,025 (résonance)

c'est-à-dire :

$$\left[\frac{A_2^{\delta+1} - A_1^{\delta+1}}{(A_2 - A_1)(\delta+1)} \right]^{\frac{1}{\delta}} \approx 4,0$$

La valeur de σ_e s'en déduit immédiatement :

$$\sigma_e = 1,12 \times 7 \times 4 = \boxed{31,4 \text{ bars}}$$

Cette valeur correspond à la contrainte équivalente pour un balayage allant de 75 à 225 Hz en considérant l' "accumulation" de dommage dans la poutre. Pour $\alpha = 7$, nous devons donc avoir égalité entre σ_e et la contrainte de rupture statique maximale. Mais compte-tenu de l'indétermination concernant surtout α , nous pouvons considérer les écarts trouvés comme acceptables.

En conclusion, ces essais de fatigue sous excitation sinusoïdale avec balayage en fréquences nous ont permis :

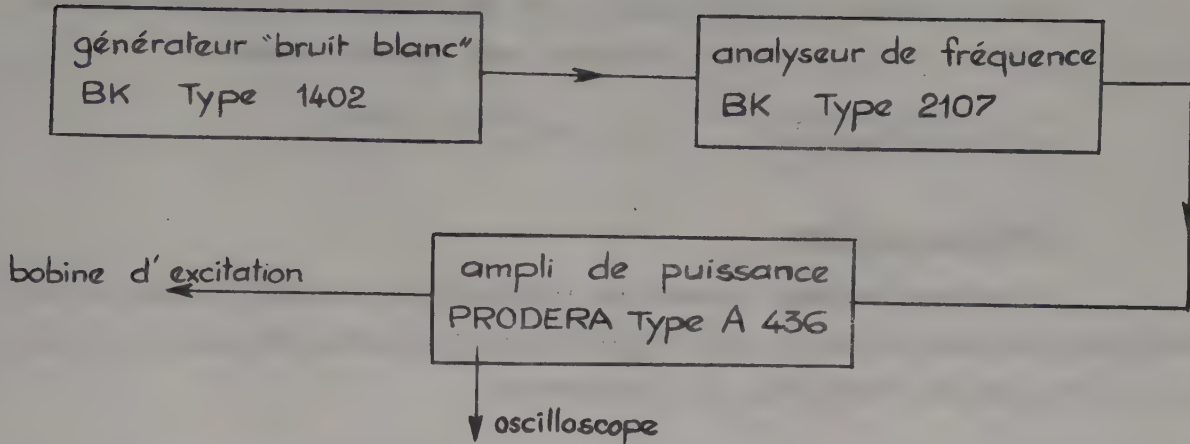
1°) de montrer l'existence pour le béton d'une limite de fatigue égale approximativement à 35 % de la rupture statique maximale. Cette limite a été étudiée pour un béton de 7 jours et de composition bien définie.

2°) de conclure que le procédé par balayage en fréquences est bien plus "efficace" au point de vue fatigue du béton qu'un essai à fréquence constante, d'où la nécessité de définir une contrainte équivalente.

3°) de penser, étant donné la dispersion des résultats et d'après la théorie de SENIK, que 15 à 20 essais pour des conditions identiques de fatigue sont à peine suffisants pour formuler des conclusions affirmatives.

C - REPONSE DE LA POUTRE A UNE EXCITATION "BRUIT BLANC" -

Cette étude a permis d'analyser le comportement des poutrelles en béton sous une excitation "bruit blanc" avec 2 fréquences de coupure voisines de la fréquence de résonance. Nous avons prévu un montage semblable à celui utilisé pour les essais précédents, mais le générateur de bruit blanc (BRÜEL et KJAER 1402) ne s'adaptant pas sur la table vibrante MB, nous avons été dans l'obligation de modifier le schéma d'étude dont nous donnons ci-après le principe.



Nous avons utilisé l'analyseur de fréquence en filtre permettant de limiter la bande passante autour de la fréquence de résonance. L'amplificateur de puissance (225 W) permet de sortir une intensité maximale de 20 A. Cette intensité est mesurée par l'intermédiaire d'un ampèremètre thermique (SIC F 510). D'autre part, une sortie de l'amplificateur (10 mV/A) peut être branchée sur un oscilloscope pour nous donner la forme du signal de sortie. L'excitateur fournit une force de 3,5 N/A. La bobine est directement solidaire de la poutre fixée sur le fer U déjà utilisé pour les autres essais.

D'autre part, étant donné la puissance réduite de l'amplificateur, nous avons été dans l'obligation de modifier les conditions expérimentales prises pour les essais précédents. Nous avons gardé pour le béton une composition identique, mais nous avons essayé les poutres à 3 jours 1/2 au lieu de 7, et diminué la hauteur de 4 cm à 2,8 cm.

Finalement, ces modifications ont donné pour les poutres une fréquence propre f_1 voisine de 70 Hz. Grâce à l'analyseur de fréquence, la bande passante a été limitée à $(1 \pm 0,145) f_1$.

Les essais ont été conduits dans les buts suivants :

1°) déterminer la limite de fatigue dans le cas d'une excitation "bruit blanc" en calculant le nombre de cycles nécessaire pour obtenir la rupture, en fonction de l'amplitude de l'excitation.

2°) établir un bilan comparatif entre les essais à dommage cumulatif (balayage en fréquences et "bruit blanc").

1 - Résultats expérimentaux obtenus

1.1 - Essais statiques

Pour le béton à 3,5 j. étudié, les résistances statiques moyenne et maximale calculées pour les essais réalisés sont respectivement :

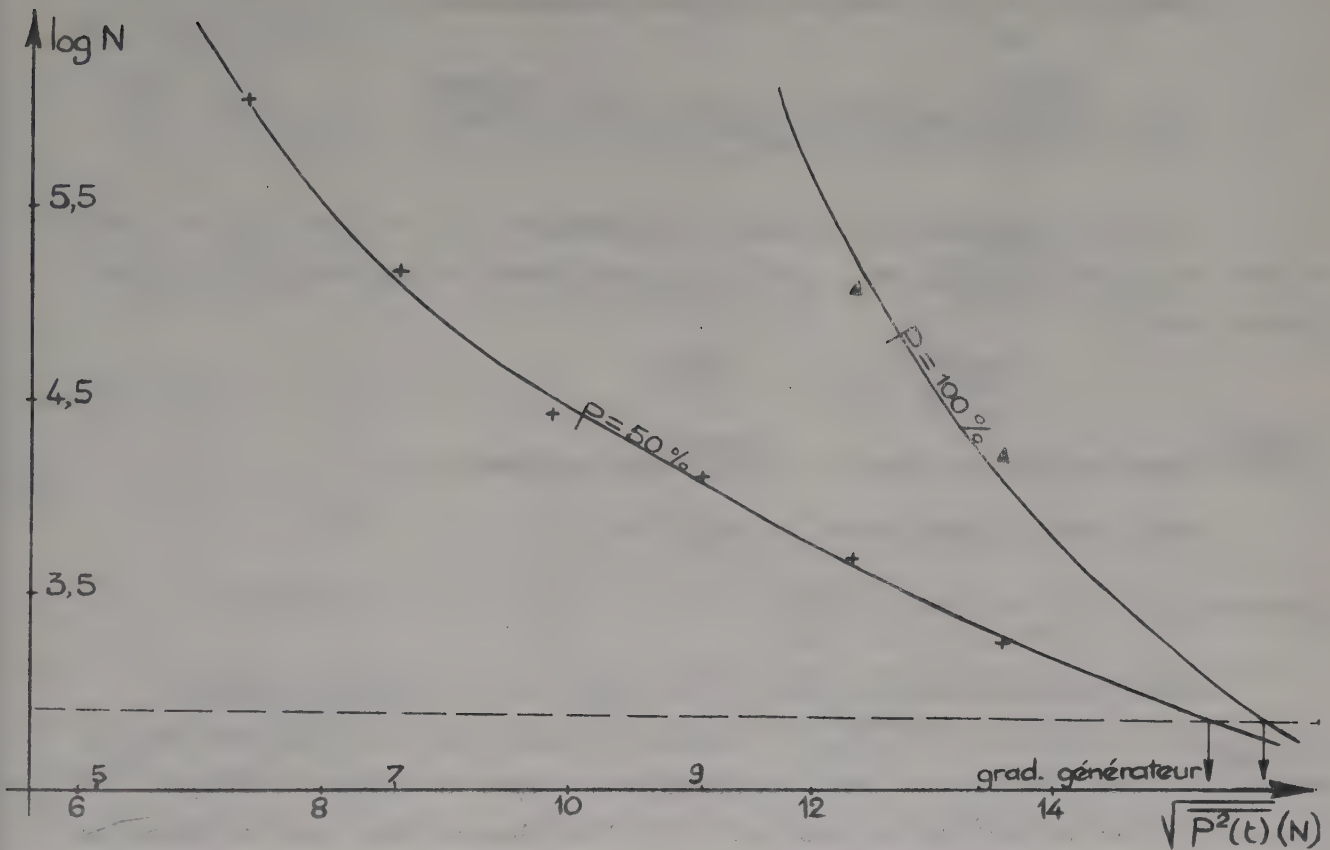
$$\underline{\sigma_{3,5} = 22,4 \text{ bars}} \quad \underline{\sigma_{3,5 \text{ max}} = 24,5 \text{ bars}}$$

1.2 - Essais de fatigue

Le tableau suivant résume les résultats de fatigue obtenus en déterminant pour une excitation de type "bruit blanc" le nombre de cycles N à la rupture en fonction de l'amplitude de l'excitation.

Valeur efficace excitation $\sqrt{p^2(\tau)}$ (N)	nb éprouvettes cassées	Z	N _{moy.}	s	c _v %
13,47	8	3,284	1 920	0,655	19
12,25	9	3,701	5 020	0,701	18
11,02	7	4,125	13 330	0,753	18
9,80	7	4,462	29 020	0,492	11
8,57	9	5,183	152 500	0,329	6
7,35	3	6,051	1 125 000	0,479	8

Le graphe ci-après représente les courbes de fatigue correspondant aux probabilités de rupture de 50 % et 100 %.



L'analyse de la courbe de fatigue (à 50 %) permet de vérifier qu'il existe aussi pour ce béton une limite de fatigue, mais sur le graphique il apparaît difficile de l'évaluer. Néanmoins, compte-tenu de la courbure prise par la courbe, nous pensons que cette limite se trouve vers la graduation 4 du générateur, ce qui donnerait pour le béton à 3,5 j une limite de fatigue de l'ordre de 32 %.

2 - Détermination de la contrainte équivalente

Nous avons vu que dans le cas d'une excitation "bruit blanc" à bande étroite, la contrainte équivalente σ_e pouvait s'écrire (relation 53) :

$$\sigma_e = \sqrt{2} \sqrt{\overline{\sigma^2}} \left[\Gamma \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) \right]^{\frac{1}{\delta}}$$

$\sqrt{\overline{\sigma^2}}$ représente la valeur efficace de la contrainte appliquée à la poutre.

D'autre part, il existe une relation entre $\sqrt{\overline{\sigma^2}}$ et $\sqrt{\overline{P^2(t)}}$

$$\overline{\sigma^2(t)} = \frac{12 E \overline{P^2(t)}}{m l^2 b h \omega_1^2 (r_{II} - r_I)} \cdot K$$

avec
$$K = \int_{r_I}^{r_{II}} \frac{dr}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}$$

Comme $\omega_1^2 = \frac{\pi^4 EI}{ml^4}$, nous en déduisons immédiatement :

$$\sqrt{\sigma^2(t)} = \frac{12 l}{\pi^2 b h^2} \frac{1}{\sqrt{r_{II} - r_I}} \sqrt{K} \sqrt{P^2(t)}$$

Pour les fréquences de coupure correspondant à $r_I = 0,855$ $r_{II} = 1,145$ et pour $b = 4$ cm $h = 2,8$ cm $l = 50$ cm, nous avons, d'une part, $K \approx 4,88$ et, d'autre part :

$$\sqrt{\sigma^2(t)} = 0,797 \sqrt{P^2(t)}$$

$\sqrt{\sigma^2(t)}$ étant calculée en bars si $\sqrt{P^2(t)}$ est exprimée en N.

Pour $\delta = 9,4$, nous avons $[\Gamma(1 + \frac{\delta}{2})]^{\frac{1}{\delta}} = 1,57$

c'est-à-dire : $\sigma_e = 1,77 \sqrt{P^2(t)}$

Cette contrainte équivalente σ_e est égale à la contrainte maximale $\sigma_{3,5 \text{ max}}$ si la valeur de $\sqrt{P^2(t)}$ correspondante nous donne avec une probabilité de 100 % un temps de rupture par fatigue égal au temps de rupture statique, c'est-à-dire qu'au bout de ce temps on a 100 % de chances pour que la poutre se casse, que ce soit sous des sollicitations statiques ou de fatigue. Mais un problème se pose du fait que la rupture n'est jamais immédiate. Pour les essais statiques, il y a toujours un temps d'accroissement de la charge, sinon, en appliquant directement la charge de rupture, il y a un phénomène de choc. Cette même remarque s'applique aussi aux essais de fatigue. Finalement, pour pouvoir comparer les résultats, nous avons pensé qu'il fallait que les temps d'accroissement de la charge (essais statiques ou de fatigue) devaient être identiques. Pratiquement, ce temps était de 11 sec., ce qui nous donne pour cette période $\log N = 2,886$. A ce logarithme, correspond une valeur de $\sqrt{P^2(t)}$ égale à 15,5 N en considérant une probabilité de rupture de 100 %.

La valeur de σ_e s'en déduit par :

$$\sigma_e = 1,77 \times 15,5 = \underline{27,4 \text{ bars}}$$

La contrainte statique correspondante est égale à :

$$\underline{\sigma_{3,5 \text{ max}} = 24,5 \text{ bars}}$$

Calculs d'erreur sur σ_e

Nous avons remarqué que la valeur de $[\Gamma(1 + \frac{\delta}{2})]^{\frac{1}{\delta}}$ variait très peu avec δ . Ainsi, un écart pour δ de 10 % autour de 9,4 nous donne pour l'expression considérée une variation inférieure à 3,5 %. D'autre part, dans le cas le plus

défavorable ($\Delta r_I = \Delta r_{II} = \Delta \epsilon = 0,005$), l'erreur commise sur K est inférieure à 2,5 %, c'est-à-dire :

$$\frac{\Delta \sigma_e}{\sigma_e} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta b}{b} + 2 \frac{\Delta h}{h} + \frac{1}{2} \frac{\Delta r_I + \Delta r_{II}}{r_{II} - r_I} + \frac{1}{2} \frac{\Delta K}{K} + \frac{1}{2} \frac{\Delta(\sqrt{P^2(t)})}{\sqrt{P^2(t)}} + \frac{3,5}{100}$$

avec :

$$\Delta l = \Delta b = \Delta h = 1 \text{ mm} \quad \Delta r_I = \Delta r_{II} = 0,005 \quad \frac{\Delta(\sqrt{P^2(t)})}{\sqrt{P^2(t)}} = \frac{5}{100}$$

nous obtenons $\frac{\Delta \sigma_e}{\sigma_e} = 18,7 \%$

soit $\Delta \sigma_e = 5,1 \text{ bars}$

Par conséquent : $\sigma_e = (27,4 \pm 5,1) \text{ bars}$

L'erreur commise sur σ_e peut paraître importante, mais il ne faut pas oublier que la détermination de σ_e fait intervenir un nombre assez important de variables indépendantes ($b, h, l, r_I, r_{II}, \epsilon, \sqrt{P^2(t)}$) et qu'une variation minime de certaines (surtout h) introduit aussi des écarts non négligeables.

Ces derniers résultats correspondent à une probabilité de rupture de 100 %, mais il est également possible de définir pour une probabilité différente une contrainte équivalente. Pour une probabilité de 50 % par exemple, il suffit de considérer la valeur de $\sqrt{P^2(t)}$ qui nous donne $\log N = 2,886$ avec une probabilité de 50 % et nous obtenons $\sqrt{P^2(t)} = 15 \text{ N}$, c'est-à-dire $\sigma_e = 26,5 \text{ bars}$. Cette contrainte σ_e correspond à la contrainte moyenne de rupture statique, soit $\sigma_{3,5} = 22,4 \text{ bars}$.

3 - Bilan comparatif des essais sous excitation "bruit blanc" et sous excitation sinusoïdale avec balayage automatique

Dans le cas d'une excitation "bruit blanc", il n'est pas possible à un instant donné d'obtenir la valeur instantanée de la contrainte. Par contre, on peut déterminer la valeur efficace de la contrainte. Ceci nous a conduit à comparer pour chaque type d'excitation (bruit blanc et sinusoïdale) les valeurs des contraintes efficaces et équivalentes. Mais, pour cette comparaison, il est nécessaire de prendre comme fréquences extrêmes du balayage les fréquences limites de la bande passante pour l'excitation aléatoire.

3.1 - Excitation "bruit blanc"

Dans ce cas, il existe une relation directe entre σ_e et $\sqrt{\sigma^2}$:

$$\sigma_e = \sqrt{2} \sqrt{\sigma^2} \left[\Gamma(1 + \frac{\delta}{2}) \right]^{\frac{1}{\delta}}$$

Le rapport $\frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2}}$ s'en déduit immédiatement :

$$\frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2}} = \sqrt{2} \left[\Gamma(1 + \frac{\delta}{2}) \right]^{\frac{1}{\delta}}$$

Pour $\delta = 9,4$, nous obtenons :

$$\boxed{\frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2}} = 2,22}$$

3.2 - Excitation sinusoïdale avec balayage

Les expressions de $\sqrt{\sigma^2}$ et σ_e sont alors données par :

$$\sqrt{\sigma^2} = K_1 \propto \sqrt{\frac{K}{r_{II} - r_I}} \quad \text{avec} \quad K_1 = \frac{24 \rho g l^2}{\pi^3 h} \quad \alpha = \frac{P_o}{mg}$$

et

$$\sigma_e = K_1 \propto \left[\frac{A_2^{\delta+1} - A_1^{\delta+1}}{(A_2 - A_1)(\delta+1)} \right]^{\frac{1}{\delta}}$$

avec $A_i = \frac{\sigma_i}{K_1 \alpha}$, σ_1 et σ_2 correspondant respectivement aux contraintes minimale et maximale durant le balayage.

Par conséquent :

$$\frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2}} = \left[\frac{A_2^{\delta+1} - A_1^{\delta+1}}{(A_2 - A_1)(\delta+1)} \right]^{\frac{1}{\delta}} \sqrt{\frac{r_{II} - r_I}{K}}$$

Si nous considérons un balayage correspondant à la bande passante de l'excitation bruit blanc, nous avons :

$$K \approx 4,88 \quad r_I = 0,855 \quad r_{II} = 1,145$$

et par conséquent

$$\boxed{\frac{\sigma_e}{\sqrt{\sigma^2}} = 1,03}$$

Ces résultats comparatifs nous montrent qu'au point de vue de la résistance à la fatigue, une excitation aléatoire est bien plus "dangereuse" pour une structure qu'une excitation sinusoïdale. De plus, dans le cas d'une excitation "bruit blanc", l'effet de fatigue sera d'autant plus intense que la fréquence centrale de la bande passante sera proche de la fréquence de résonance de la structure. D'autre part, il semble que la limite de fatigue tende à augmenter avec l'âge du béton, mais ce point sera éclairci par les résultats des

essais suivants.

D - ETUDE DE LA RUPTURE PAR FATIGUE EN FONCTION DE LA FREQUENCE D'EXCITATION DE L'AGE ET DE LA COMPOSITION DU BETON -

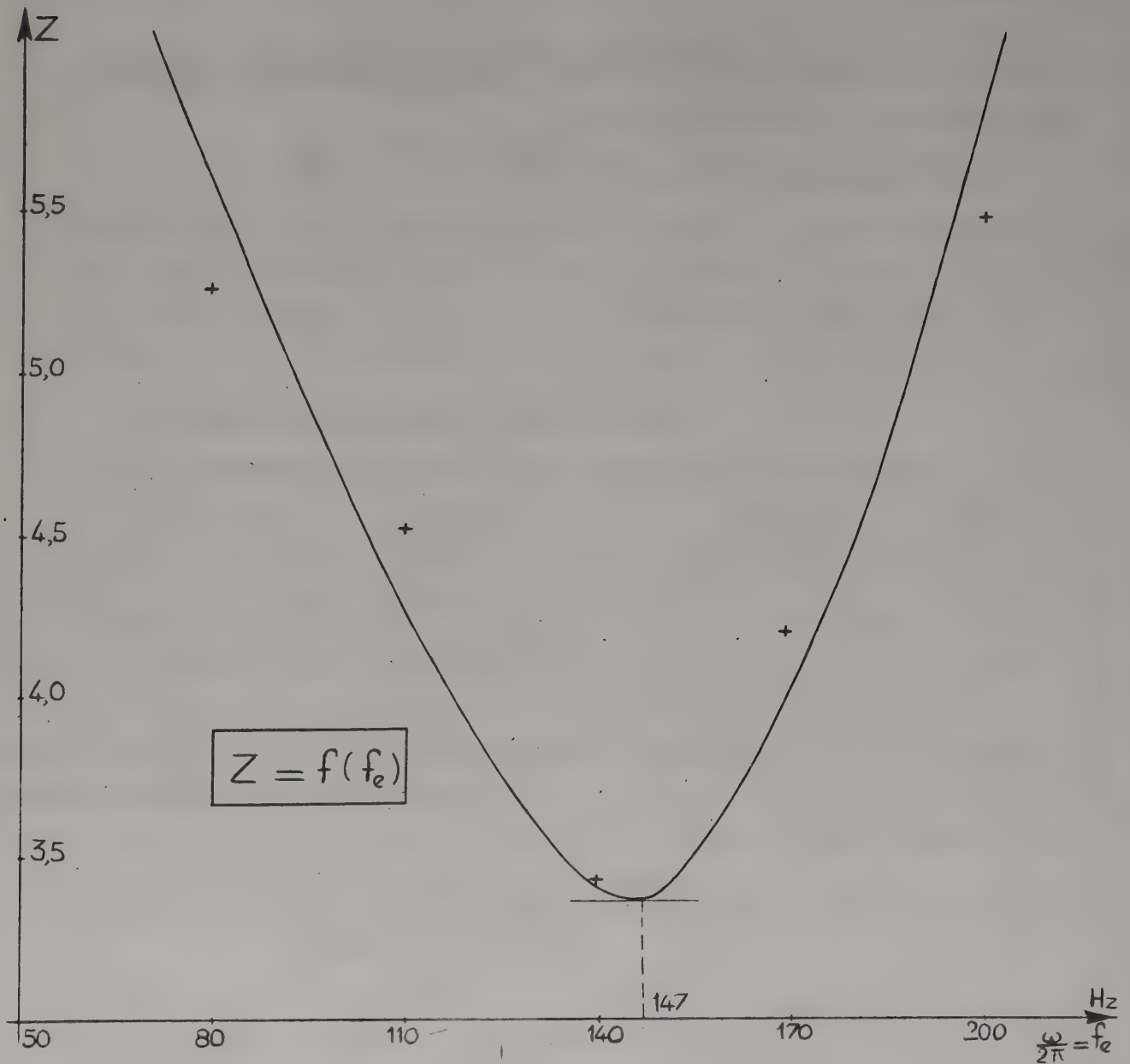
1 - Influence de la fréquence d'excitation

Pour cette étude, 5 séries d'essais ont été réalisées. Elles ont été portées sur des poutrelles de béton de 7 jours d'âge et ont été soumises à une vibration sinusoïdale avec une accélération correspondant à $a = 10 \text{ m/s}^2$. Les résultats obtenus sont portés sur le tableau suivant et nous donnent la durée de vie de la poutrette en fonction de la fréquence d'excitation.

fréquence excit. (Hz)	nb poutres	Z	N _{moy.}	s	c _v (%)
80	7	5,254	179 800	0,303	5,7
110	8	4,515	32 700	0,715	15,8
140	10	3,429	2 690	0,498	14,5
170	10	4,186	15 350	0,618	14,8
200	6	5,449	281 400	0,671	12,2

La courbe donnant les variations de Z en fonction de la fréquence d'excitation passe par un minimum pour une fréquence voisine de 147 Hz. Cette fréquence correspond à la fréquence propre de la poutre. En effet, pour cette fréquence et pour une accélération donnée, la contrainte dynamique au milieu de la poutre est maximale et par conséquent le nombre de cycles doit être minimal.

Pour le système amorti, la valeur maximale du facteur d'amplification $\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}}$ est obtenue pour $r = \sqrt{1-2\epsilon^2}$, c'est-à-dire pour une fréquence de 133 Hz, ce qui nous donne un écart de l'ordre de 5 % par rapport à la valeur trouvée expérimentalement.



1.1 - Détermination des contraintes maximales correspondant à chaque fréquence d'expérimentation f_e

La valeur maximale de la contrainte dynamique s'obtient par l'application de la relation :

$$\sigma_{\max} = \frac{K_1 \alpha}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4e^2 r^2}}$$

avec $K_1 = (1,12 \pm 0,04)$ bars

$\alpha = 10 \pm 0,1$

$r = \frac{f_e}{f_1} = \frac{f_e}{157}$

Le tableau ci-dessous nous donne les valeurs de $\sigma_{\max}$ (en bars) en fonction de la fréquence d'excitation f_e .

f_e (Hz)	r	$A = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}}$	$\sigma_{\max}$ (bars)
80	0,51	1,34	15,0
110	0,70	1,88	21,0
140	0,892	3,56	39,8
170	1,083	3,76	42,0
200	1,274	1,47	16,4

Calculs d'erreur sur $\sigma_{\max}$

- Calculs d'erreur sur A = $\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}}$

$$\frac{dA}{A} = \frac{2r(1-r^2)dr - 4\epsilon^2 r dr - 4\epsilon r^2 d\epsilon}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{2r[|1-r^2 - 2\epsilon^2| \Delta r + 2\epsilon r \Delta \epsilon]}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}$$

D'autre part :

$$r = \frac{f_e}{f_1} \quad \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta f_e}{f_e} + \frac{\Delta f_1}{f_1}$$

soit

$$\Delta r = r \left[\frac{\Delta f_e}{f_e} + \frac{\Delta f_1}{f_1} \right]$$

- Calculs d'erreur de $\sigma_{\max}$

Nous aurons :

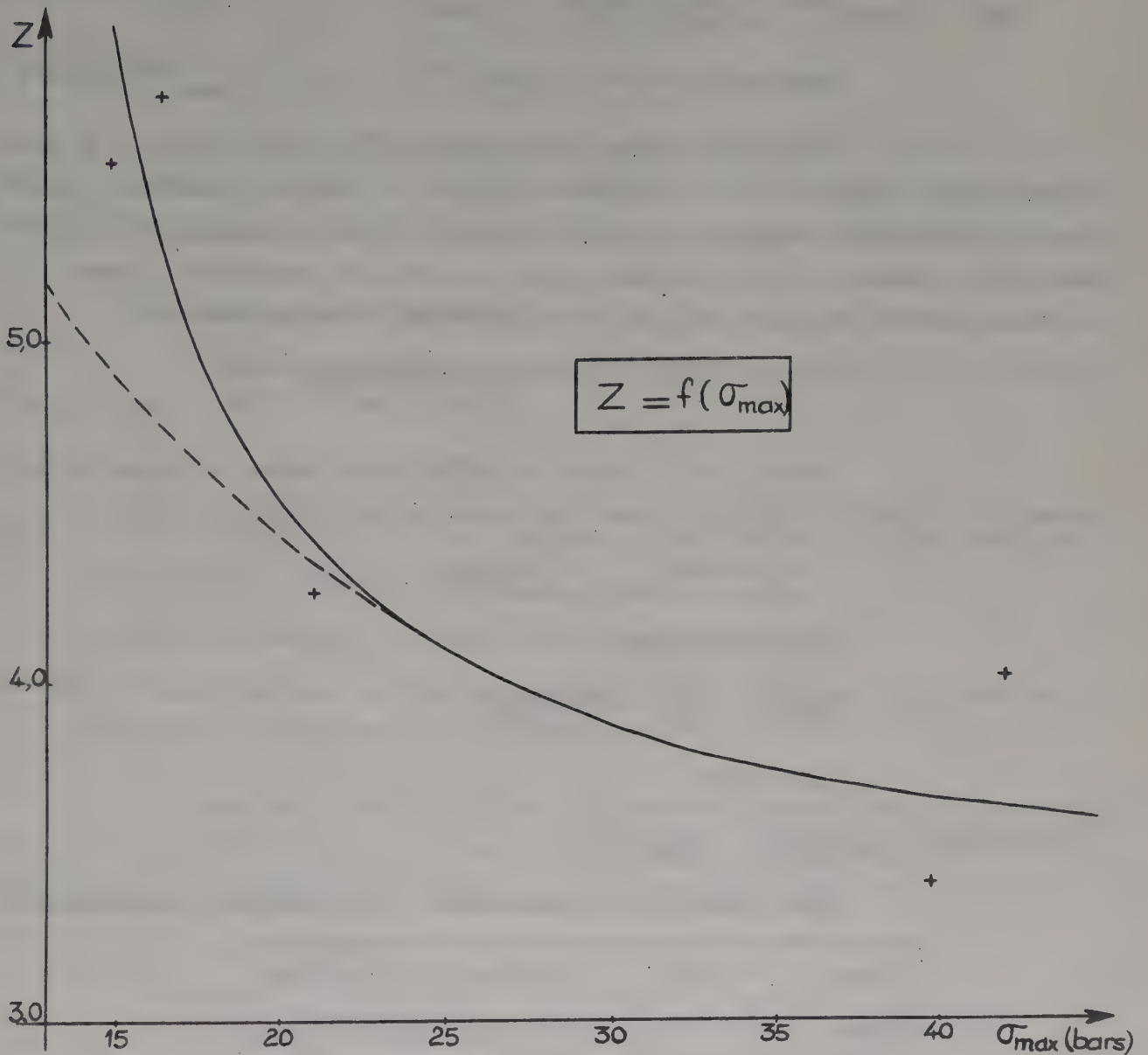
$$\frac{\Delta \sigma_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{\Delta K_1}{K_1} + \frac{\Delta \alpha}{\alpha} + \frac{\Delta A}{A}$$

En considérant $\Delta\epsilon = 5.10^{-3}$ $\Delta f_e = 1 \text{ Hz}$ $\frac{\Delta f_1}{f_1} = 5/100$ (correspondant aux écarts trouvés), nous déduisons les différentes valeurs de $\frac{\Delta\sigma_{\max}}{\sigma_{\max}}$

$f_e \text{ (Hz)}$	Δr	$\frac{\Delta A}{A} \text{ (\%)}$	$\frac{\Delta\sigma_{\max}}{\sigma_{\max}} \text{ (\%)}$
80	0,032	4,2	8,6
110	0,041	10,0	14,4
140	0,050	22,8	27,2
170	0,060	38,8	43,2
200	0,070	25,5	29,9

Nous remarquons dans ce tableau que les erreurs sur la détermination de $\sigma_{\max}$ sont très variables suivant les fréquences d'excitation. En particulier, pour $f_e = 170 \text{ Hz}$, cette erreur est très importante. Ceci provient beaucoup du fait que, pour des fréquences voisines de la fréquence de résonance, le facteur d'amplification A croît ou décroît très rapidement et une variation même faible de r entraîne pour A des écarts considérables. Ceci explique aussi que, pour une contrainte dynamique maximale de 42 bars, donc très supérieure à la contrainte maximale de rupture statique, la rupture ne soit pas immédiate. En effet, il est fort probable qu'en réalité la contrainte appliquée à la poutre soit bien inférieure à 42 bars. Par conséquent, l'analyse de la courbe $Z = f(\sigma_{\max})$ nécessite beaucoup de réserves surtout pour la partie correspondant aux contraintes les plus élevées. Pour la construction de cette courbe, nous avons considéré les valeurs de Z données par $Z = f\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$.

$f_e \text{ (Hz)}$	80	110	140	170	200
Z	5,55	4,27	3,41	4,02	5,74
$\sigma_{\max} \text{ (bars)}$	15,0	21,0	39,8	42	16,4



Cette courbe $Z = f(\sigma_{\max})$ possède une asymptote verticale représentant la limite de fatigue du béton à 7 jours. Cette asymptote correspond à une contrainte $\sigma_{\max}$ voisine de 12 bars, c'est-à-dire que la limite de fatigue est égale à $\frac{12}{33,4} = 36 \%$ de la contrainte moyenne statique. Cette valeur diffère peu de la limite de fatigue (34 %) déjà trouvée pour ce même béton dans le cas d'une excitation sinusoïdale avec balayage automatique.

1.2 - Détermination des fréquences théoriques correspondant à la limite de fatigue et à la rupture statique

1.2.1 Fréquences correspondant à la rupture statique

Dans ce cas, la contrainte dynamique maximale sera égale à la contrainte maximale de rupture statique, c'est-à-dire :

$$\sigma_{\max} = \sigma_7 \max \quad \text{soit} \quad \frac{K_1 \alpha}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}} = \sigma_7 \max$$

$$\text{Nous avons } K_1 = 1,12 \text{ bars} \quad \alpha = 10 \quad \sigma_7 \max = 35,4 \text{ bars}$$

Ce calcul suppose une probabilité de rupture de 100 %. Mais il est souvent plus correct de considérer non pas la contrainte maximale, mais plutôt la contrainte moyenne de rupture statique, ce qui correspond à une probabilité de rupture de 50 %. En effet, dans une série de résultats d'essais, la valeur moyenne est moins sujette à variation que la valeur maximale.

$$\text{Avec } p = 50 \% \quad A = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}} = \frac{\sigma_7}{K_1 \alpha}$$

Pour $\sigma_7 = 33,4$ bars, la relation se ramène à l'équation bi-carrée $r^4 - 1,96 r^2 + 0,89 = 0$, dont les solutions positives en r sont :

$$\underline{r_1 = 0,85 \quad r_2 = 1,12}$$

Calculs d'erreur

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta \sigma_7}{\sigma_7} + \frac{\Delta K_1}{K_1} + \frac{\Delta \alpha}{\alpha} \approx \frac{6,4}{100}$$

$$\Delta A = 0,19$$

$$\text{et par suite } \underline{\Delta r_1 = 0,02 \quad \Delta r_2 = 0,01}$$

Les fréquences correspondantes s'en déduisent immédiatement :

pour $r_1 = 0,85$	$130 \text{ Hz} < f_e < 137 \text{ Hz}$
pour $r_2 = 1,12$	$174 \text{ Hz} < f_e < 177 \text{ Hz}$

Pratiquement, même pour $f_e = 140$ Hz, la rupture n'était pas instantanée. D'ailleurs, il est très difficile d'observer une rupture immédiate car il y a toujours un temps d'accroissement de la charge. Mais il faut quand même remarquer que pour 140 Hz, la durée de vie de 50 % des poutrelles était inférieure à 15 sec.

1.2.2 Fréquences correspondant à la limite de fatigue

En admettant que la limite de fatigue soit égale à 36 % de la contrainte moyenne statique, les fréquences correspondantes s'obtiennent par la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}} = \frac{0,36 \sigma_7}{K_1 \alpha}$$

ce qui nous donne : $r_1 = 0,29$ $r_2 = 1,67$

c'est-à-dire :

$$f_e = 45 \text{ Hz et } f_e = 262 \text{ Hz}$$

Ces 2 fréquences doivent donc correspondre aux asymptotes verticales de la courbe $Z = f(\frac{\omega}{2\pi})$. En effet, pour ces conditions expérimentales, le nombre de cycles à la rupture et par conséquent $\log N$ doit devenir infini.

1.3 - Calcul du coefficient δ

Le béton possédant une limite de fatigue, la relation de SHANLEY s'écrit donc :

$$N(\sigma) = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma - \sigma_l} \right)^\delta$$

où σ_1 est la contrainte de rupture statique, c'est-à-dire 33,4 bars, avec une probabilité de rupture de 50 %.

σ_l la limite de fatigue du béton, soit ici 12 bars.

$N(\sigma)$ le nombre de cycles nécessaire pour obtenir la rupture de la poutre lorsqu'une contrainte σ lui est appliquée.

Mais la détermination des contraintes élevées étant peu précise, il est donc préférable de considérer les contraintes intermédiaires pour le calcul de δ . En prenant par exemple $\sigma_{\max} = 24$ bars, soit $\log N = 4,16$, nous avons :

$$\delta = \frac{\log N}{\log \frac{\sigma_1}{\sigma - \sigma_l}} = 9,36$$

Nous utiliserons par la suite $\delta = 9,4$.

Compte-tenu des écarts observés, nous pensons que la précision sur cette valeur est de l'ordre de 10 %.

A part la détermination du coefficient δ que nous avons utilisé pour le calcul des contraintes équivalentes, cette étude nous a permis :

- de retrouver la fréquence propre du système uniquement à partir d'essais de fatigue.

- de montrer que pour le béton à 7 jours étudié, la limite de fatigue est de l'ordre de 35 % de la contrainte de rupture statique, conclusion que nous avons déjà tirée à la suite des essais sous excitation sinusoïdale avec balayage automatique.

2 - Influence de la composition du béton

2.1 - Composition et résistances statiques des bétons étudiés

Nous donnons dans le tableau ci-dessous, d'une part, la composition en poids des bétons étudiés (en kg/m³) et, d'autre part, leurs résistances statiques moyennes à la flexion (σ_7) et à la compression (σ'_7). Les essais ont été réalisés à 7 jours.

	composition (kg/m ³)				résistances statiques (bars)	
	gravillons	sable	ciment	eau	σ_7	σ'_7
Béton 1	1 200	680	450	180	33,4	153
Béton 2	975	810	540	180	42,1	197
Béton 3	930	830	565	180	46	252
Béton 4	915	810	600	180	47,7	280

2.2 - Résultats des essais de fatigue

Les essais de fatigue concernant les différents bétons ont été effectués sur des poutrelles de 7 jours et sous les conditions expérimentales suivantes : excitation sinusoïdale à fréquence constante $f_e = 130$ Hz et à accélération constante $\alpha = 10$.

Bétons	Béton 1	Béton 2	Béton 3	Béton 4
nb poutrelles	obtenu d'après $Z = f(\frac{\omega}{2\pi})$	9	8	8
Z	3,620	4,443	5,922	6,150

2.3 - Détermination des contraintes maximales

Comme pour l'étude précédente, nous avons :

$$\sigma_{\max} = \frac{K_1 \alpha}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}}$$

Comme les essais sont effectués à fréquence constante ($f_e = 130$ Hz), il suffit donc de connaître les fréquences propres f_1 des différentes poutres

pour déduire les valeurs de $\sigma_{\max}$ et de $u = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_7}$.

	f_1 (Hz)	r	$A = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}}$	$\sigma_{\max}$ (bars)	u
Béton 1	157	0,828	2,80	31,30	0,937
Béton 2	167	0,778	2,34	27,60	0,655
Béton 3	178	0,730	2,02	22,60	0,492
Béton 4	182	0,714	1,94	21,70	0,455

Calculs d'erreur sur $\sigma_{\max}$

Nous avons trouvé :

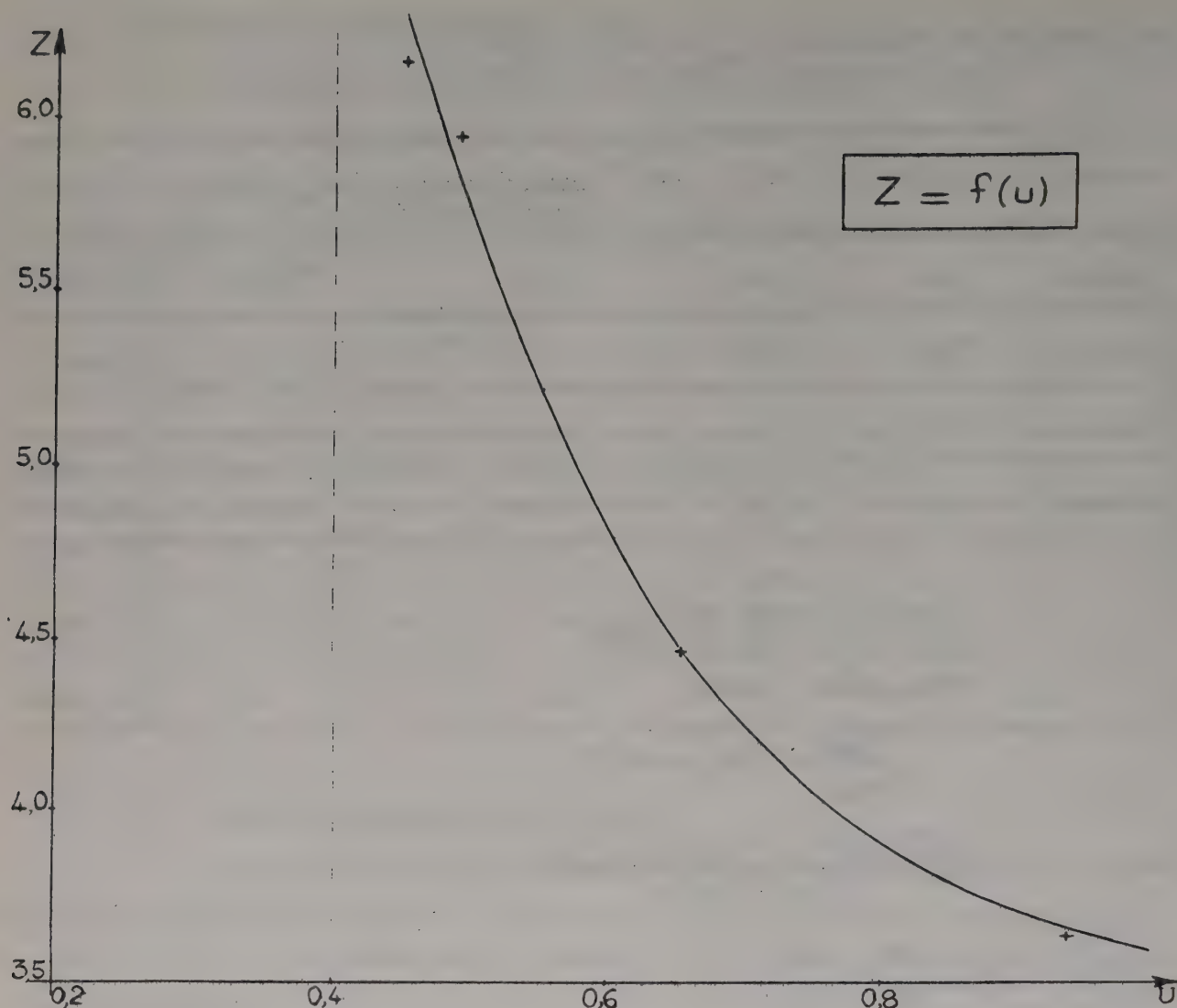
$$\frac{\Delta \sigma_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta K_1}{K_1} + \frac{\Delta \alpha}{\alpha}$$

avec
$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{2r [|1-r^2 - 2\varepsilon^2| \Delta r + 2\varepsilon r \Delta \varepsilon]}{(1-r^2)^2 + 4\varepsilon^2 r^2}$$

et
$$\Delta r = r \left[\frac{\Delta f_e}{f_e} + \frac{\Delta f_1}{f_1} \right]$$

	Δr	$\frac{\Delta A}{A}$ (%)	$\frac{\Delta \sigma_{\max}}{\sigma_{\max}}$ (%)
Béton 1	0,047	19,0	23,4
Béton 2	0,045	15,0	19,4
Béton 3	0,042	11,6	16,0
Béton 4	0,041	10,7	15,1

2.4 - Etude de la courbe $Z = f(u)$



Cette courbe de fatigue correspond à des bétons de compositions différentes et représente donc la durée de vie des poutrelles en fonction du rapport de la contrainte dynamique appliquée et de la contrainte moyenne statique. L'asymptote verticale pour $u \approx 0,4$ correspond à un béton encore plus dosé que la béton n°4, c'est-à-dire que la limite de fatigue du béton tend à augmenter avec sa richesse.

3 - Influence de l'âge du béton

Nous avons déjà donné dans les résultats préliminaires les valeurs des contraintes de rupture statique à la flexion (σ_j) et à la compression (σ'_j). Ces essais normalisés ont été réalisés sur des bétons de 7, 14, 28 et 90 jours. La résistance à la fatigue a été étudiée dans des conditions identiques à celles prises pour l'influence de la composition du béton, c'est-à-dire $f_e = 130$ Hz, $\alpha = 10$.

3.1 - Résultats des essais de fatigue

	j = 7	j = 14	j = 28	j = 90
nb de poutrelles	obtenu d'après $Z = f(\frac{\omega}{2\pi})$	9	8	6
Z	3,620	4,175	4,722	durée > 20 ^h
σ_j (bars)	33,4	41,8	44,7	61,8
σ_j^t (bars)	153	181	202	273

Comme pour l'étude précédente, nous allons tracer la courbe $Z = f(u)$ d'où la nécessité de calculer les valeurs de $\sigma_{\max}$.

3.2 - Calcul des contraintes maximales

La valeur de $\sigma_{\max}$ se calcule par la relation habituelle :

$$\sigma_{\max} = \frac{K_1 \alpha}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}}$$

avec $r = \frac{f_e}{f_1} = \frac{130}{f_1}$ et $\alpha = 10$

D'autre part :

$$\frac{\Delta \sigma_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{\Delta K_1}{K_1} + \frac{\Delta \alpha}{\alpha} + \frac{\Delta A}{A}$$

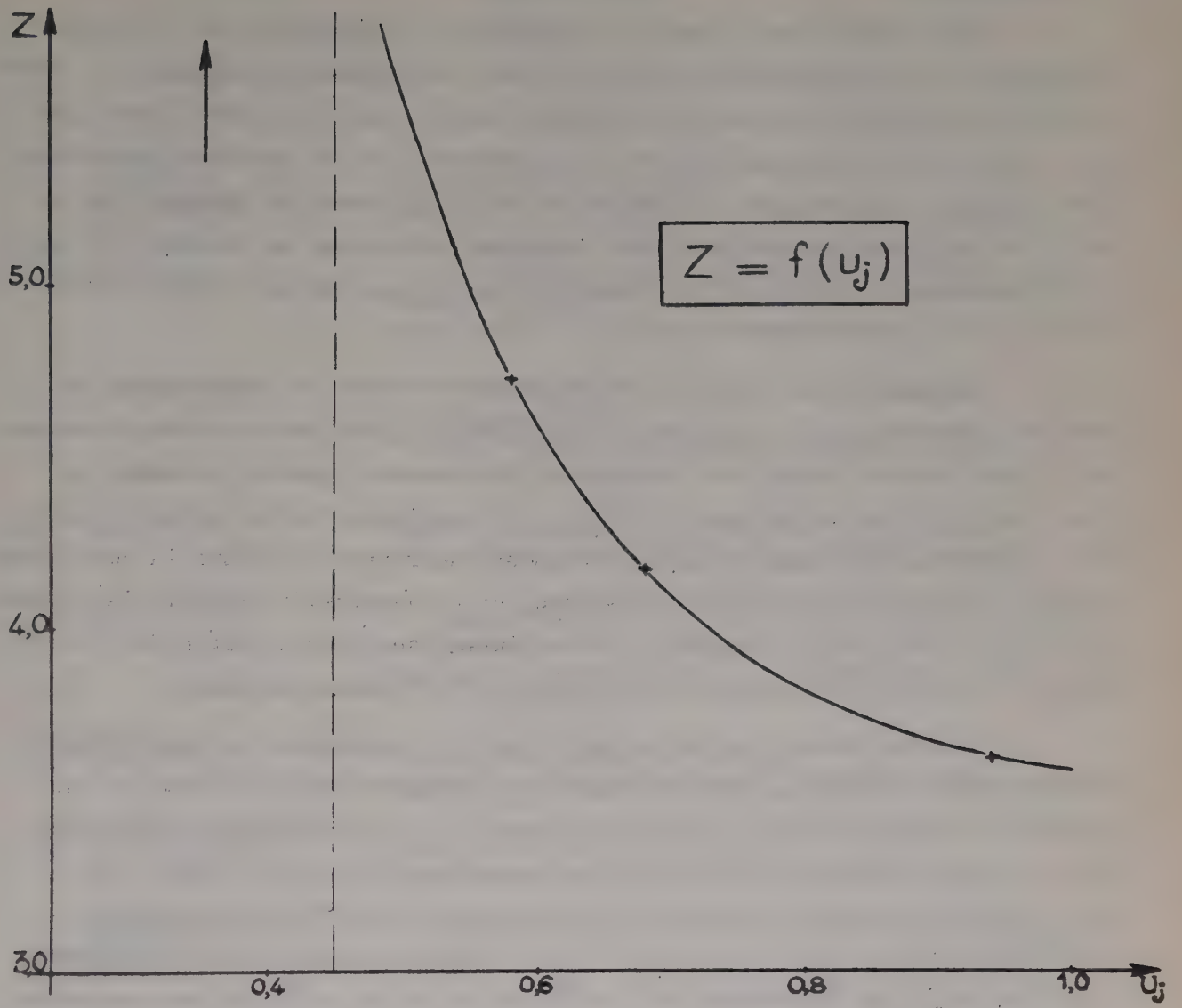
avec $A = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}}$

et $\frac{\Delta A}{A} = \frac{2r[|1-r^2-2\epsilon^2| \Delta r + 2\epsilon r \Delta \epsilon]}{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}$

	j = 7	j = 14	j = 28	j = 90
f_l (Hz)	157	163	168	181
r	0,828	0,798	0,774	0,718
Δr	0,047	0,046	0,044	0,041
$A = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4\epsilon^2 r^2}}$	2,80	2,53	2,32	1,96
$\frac{\Delta A}{A}$ (%)	19,0	16,9	14,6	10,9
$\sigma_{\max}$ (bars)	31,30	28,30	25,90	21,90
$\frac{\Delta \sigma_{\max}}{\sigma_{\max}}$ (%)	23,4	21,3	19,0	15,3
$u_j = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_j}$	0,937	0,677	0,579	0,354

Ce tableau nous permet d'obtenir la courbe de fatigue correspondant aux variations de la durée de vie du béton étudié en fonction du rapport u_j de la contrainte dynamique maximale et de la contrainte σ_j , rapport qui est également fonction du vieillissement du béton.

La limite de fatigue donnée par cette courbe est approximativement égale à 42 % de la contrainte de rupture statique. Bien que le nombre d'essais soit réduit, et pourtant seuls les essais à 7, 14, 28 et 90 jours sont normalisés, nous pensons que la limite de fatigue d'un béton augmente à mesure qu'il vieillit.



CONCLUSION -

Cette étude nous a permis d'approfondir le phénomène de la fatigue des poutres en béton soumises en flexion à des vibrations sinusoïdales ou aléatoires. Les résultats des essais de fatigue étant en général très diversifiés, nous n'avons pas voulu nous limiter à l'expérimentation de quelques poutrelles. C'est pourquoi, surtout pour la détermination de la limite de fatigue dans le cas d'une excitation sinusoïdale avec balayage, nous avons eu recours à l'analyse statistique. Evidemment, le nombre d'essais reste toujours assez limité du fait de la durée d'expérimentation.

Néanmoins, ces essais nous ont permis de tirer des conclusions de première importance pour l'analyse du comportement futur de structures diverses sous l'effet de sollicitations de fatigue. Nous pensons particulièrement au calcul de la limite de fatigue. En effet, en connaissant cette valeur, il est facile de déduire en fonction de la contrainte de rupture statique la contrainte maximale qui peut être tolérée en pratique, et au-dessous de laquelle la rupture par fatigue n'est pas envisageable. Cette limite, qui pour un béton de 7 jours est de l'ordre de 35 %, augmente avec l'âge et la richesse du béton.

D'autre part, cette étude nous a permis de comparer le comportement des poutrelles de béton pour différents types d'excitation et de montrer que l'effet de fatigue est bien plus intense dans le cas de vibrations aléatoires (circulation de véhicules lourds au voisinage d'un édifice par exemple) que dans le cas de vibrations sinusoïdales (mouvements mécaniques périodiques). Ceci s'explique par le fait que pour le 1er type d'excitation il y a un phénomène d'accumulation de dommage, ce qui nécessite la définition d'une contrainte équivalente, tandis que, pour une force excitatrice sinusoïdale, la connaissance de la fréquence d'excitation permet en général la détermination de la contrainte agissante en un point.

En fait, le comportement des poutres en béton sous l'effet de la fatigue ne forme qu'un volet de l'étude des structures en béton. En particulier, l'analyse et l'étude des dalles (planchers - dalles de bâtiments industriels par exemple) sous des sollicitations de fatigue ne manque pas d'intérêt.

Les effets néfastes de la fatigue étant analysés, le problème de l'isolation vibratoire se trouve donc posé. Ainsi pour la réduction des vibrations causées par la circulation routière, de nouveaux types de fondations de chaussées et de revêtements ont vu le jour : par exemple une chaussée reposant sur des dalles de caoutchouc absorbant les 4/5 des vibrations de surface a été construite en Italie pour protéger le Palais de la Farnesina et les fresques de Raphaël.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] VOLTERRA E. and ZACHMANOGLU E.C. - "Dynamics of vibrations"
CHARLES E., Merrill Books, Inc. Columbus Ohio
- [2] PIRONNEAU Y. - "Cours de Mécanique des Vibrations, Systèmes à un degré de liberté"
Cours professé à l'E.N.S.M. Nantes
- [3] LIEPMANN H.W. - "On the application of statistical concepts to the buffeting problem"
Journal of the Aeronautical Sciences, vol.19,
Déc. 1952, n°12 p.800
- [4] KAPLAN M.F. - "Crack propagation and fracture of concrete"
JACI, U.S.A., Nov.1961, vol.58, n°5 pp.591-610
- [5] WILLIS J.R. - "A comparison of the fracture criteria of Griffith and Barenblatt"
Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1967,
vol.15, pp.151-162
- [6] MINER M.A. - "Cumulative damage in fatigue"
Journal of Applied Mechanics, vol.12, 1945, pp.159-164
- [7] WILKINS E.W.C. - "Cumulative damage in fatigue"
Colloque de fatigue, STOCKHOLM, 1955, p.321
- [8] HILSDORF H.K. - "Fatigue strength of concrete under varying flexural stresses"
KESLER C.E.
JACI, Oct.1966, Tome 63, Fasc.10, pp.1059-1076
- [9] SHANLEY F.R. - "A theory of fatigue based on unbonding during reversed slip"
RAND, Rep P-350, Santa Monica, Calif. 1952
- [10] SENIK V.Y. - "Traitement statistique des essais de fatigue avec base limitée"
d'après ZAVODSKAYA LABORATORIYA, vol.33, n°3,
pp.336-339, Mars 1967
- [11] BAZOVSKY I. - "Fiabilité, Théorie et pratique de la sureté de fonctionnement"
Traduit et adapté par G. GOHEN et J. CHINAL
Dunod, Paris 1966
- [12] MAC-CALL J.T. - "Probability of fatigue failure in plain concrete"
JACI, Proceedings, August 1959, Vol.55, n°2,
pp.233-244
- [13] WEIBULL W. - "A statistical theory of the strength of materials"
IVA, Proceedings, n°151, 1939

- [14] - "Bulletin Officiel du Ministère de l'Équipement et du Logement"
Fascicule spécial n°64-21 ter, circulaire n°70 du 14-10-64
- [15] DREUX G. - "Contribution à l'étude du comportement des éprouvettes de béton"
Séries essais et mesures - Annales de l'ITBTP n°206, fév. 1965, pp.295-314.

